해석개론 숙제 #7

제출일시 2010 년 11 월 23 일 14시 00분

문제 1 9.4.1, 9.4.2, 9.4.5, 9.4.6, 9.5.14, 9.5.15, 9.5.16

문제 2 구간 $[0, 2\pi]$ 위에서 함수

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}\, e^{i(\pi - x)\alpha}$$

의 푸리에 급수를 구하여라 (단, α는 정수가 아니다). 이를 이용하여 등식

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}$$

을 보여라.

문제 3 구간 $[-1, 1]$ 위에서 다항식함수 L_n을 다음

$$L_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}\,(x^2-1)^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

과 같이 정의하자. 다항식 L_n은 n-차 다항식인데, 이를 n-차 르잔드르 다항식이라 부른다.

(가) 만일 $f \in C^\infty[-1, 1]$이면

$$\int_{-1}^{1} L_n(x) f(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^{1} (x^2-1)^n f^{(n)}(x) dx$$

임을 보여라.

(나) $\{L_n : n = 0, 1, 2, \ldots\}$은 서로 수직임을 보여라.

(다) 벡터공간 $\mathcal{R}^2[-1, 1]$ 안에서 L_n의 노음이 다음

$$\|L_n\|_2^2 = \int_{-1}^{1} |L_n(x)|^2 dx = \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1}$$

과 같이 주어짐을 보여라.

(라) 내적공간 $\mathcal{R}^2[-1, 1]$ 안에서 $1, x, x^2, \ldots x^{n-1}$과 서로 수직인 n-차 다항식함수는 L_n의 상수배임을 보여라.

(마) 내적공간 $\mathcal{R}^2[-1, 1]$의 함수족 $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$에서 그람-쉬미트 과정에 의하여 얻어지는 정규직교집합이 무엇인지 구하여라. [참조: 이인석, 선형대수와 군, 10장]