

인문사회계를 위한 수학 I 시험

2012 년 6 월 13 일

문제 1 함수 $y = \sin x$ 와 $y = \cos x$ 의 테일러급수를 구하여라. 또한, 이를 이용하여 함수 $f(x) = \tan x$ 의 5차 근사식을 구하여라.

문제 2 사인함수 $f(x) = \sin x$ 의 테일러 급수의 값이 $\sin x$ 와 같아지는 x 의 범위를 구하여라. 또한, 이를 이용하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 의 값을 추측해 보아라.

문제 3 함수 $f(x) = \arctan x$ 의 테일러급수를 구하고, 이 급수의 값이 $\arctan x$ 와 같아지는 x 의 범위를 구하여라. 또한, 이를 이용하여 원주율 π 를 무한급수로 나타내어라.

문제 4 다음 급수의 수렴 여부를 판정하여라.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

문제 5 $a_n \geq 0$ 일 때 다음 명제들이 옳은지 거짓인지 밝혀라.

(1) 급수 $\sum a_n$ 이 수렴하면 $\sum a_n^2$ 도 수렴한다.

(2) 급수 $\sum a_n$ 이 수렴하면 $\sum \sqrt{a_n}$ 도 수렴한다.

문제 6 거듭제곱급수 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} x^n$ 의 수렴반경을 구하여라. 또한, 이 급수가 수렴하는 x 의 범위를 결정하여라.

문제 7 미분방정식 $y' = 2y$ 를 풀어라.

문제 8 임의의 실수 α 와 자연수 k 에 대하여 다음과 같이 정의하자.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

(1) 급수 $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ 의 수렴반경을 구하여라.

(2) 위 급수로 정의된 함수 $y = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$ 는 수렴반경 내에서 미분방정식

$$(1+x)y' = \alpha y$$

를 만족함을 보여라.

(3) 이를 이용하여 함수 $f(x) = (1+x)^\alpha$ 에 대하여 다음 등식

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

이 성립함을 예측할 수 있다. 이를 참이라 가정하여 함수 $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ 의 6차 근사식을 구하여라.

문제 9 아무 거나 써라.