다변수해석학 숙제 #1

제출일시 2013 년 3 월 27 일 12시 30분

문제 1 교과서 문제 (쪽–문제): 12–3, 18–2, 26–4, 30–6, 31–8

문제 2 고정된 양수 $a > 0$에 대하여 집합 $\mathbb{P}$를 다음과 같이 정의하자.

$$\mathbb{P} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x & az \\ az & y \end{pmatrix} \geq 0 \right\}$$

(가) 집합 $\mathbb{P}$를 xyz-공간의 평면 $x + y = 1$로 자른 단면이 원판이 되려면 a의 값이 얼마이어야 하는가?

(나) 위에서 구한 a값에 대하여 집합 $\mathbb{P}$의 모습을 설명하여라.

(다) $a = 1$일 때 집합 $\mathbb{P}$의 모습을 설명하여라.

(라) $a = 1$일 때, 집합 $\mathbb{P}$의 경계에 들어가는 행렬들의 일반적인 꼴을 쓰고, 이 행렬들의 특징이 무엇인가 살펴보아라.

문제 3 복소수를 원으로 하는 $n \times n$ 복소행렬 $A = [a_{ij}]$ 가 $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$을 만족할 때, 이를 **자기수반 행렬** (self-adjoint matrix, Hermitian matrix)라 부른다. 다음에 열거한 2×2 복소행렬들

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

은 모두 자기수반 행렬들이다. 자기수반 행렬 A가 다음 성질

- 각 $X \in \mathbb{C}^n$에 대하여 $\langle AX, X \rangle \geq 0$이다

를 만족할 때, 이를 **준양부호** 행렬이라 하고, $A \geq 0$으로 나타낸다. 여기에서

$$\langle X, Y \rangle = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \cdots + x_n\bar{y}_n$$

이다.

(가) 자기수반 행렬 $\begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & d \end{pmatrix}$가 준양부호일 필요충분조건은

$$a \geq 0, \quad d \geq 0, \quad ad - |b|^2 \geq 0$$

임을 보여라.

(나) 임의의 2×2 자기수반 행렬은 적절한 실수 x, y, z, w에 대하여

$$A[x, y, z, w] = x\sigma_1 + y\sigma_2 + z\sigma_3 + wI$$

형태로 쓸 수 있음을 보여라.

(다) 집합 $\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : A[x, y, z, w] \geq 0\}$의 모습을 설명하여라.

(라) 위 집합의 경계에 들어가는 행렬들의 일반적인 꼴을 쓰고, 이 행렬들의 특징이 무엇인가 살펴보아라.