

다변수해석학 시험

2013 년 4 월 24 일

문제 1 다음 이차식을 일차식의 완전제곱의 선형결합으로 표시하여라.

- (1) $x^2 + 2xy - y^2$
- (2) $2xy + 4yz + 6zx$

문제 2 이변수함수 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 과 평면의 점 $P \in \mathbb{R}^2$ 를 고정하고, 단위벡터 $D \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여 일변수함수 $g_D(t) = f(P + tD)$ 를 생각하자.

- (가) $g'_D(0)$ 을 함수 f 의 그래디언트를 이용하여 표현하여라.
- (나) 이변수함수 f 에 대하여, (가)에서 구한 $g'_D(0)$ 가 무슨 의미를 가지는지 설명하여라.
- (다) 점 P 가 고정되어 있을 때, $g'_D(0)$ 의 값이 최대가 되려면 D 를 어떻게 잡아야 하는지 설명하여라.
- (라) 개뿔이가 등고선 지도를 들고 등산하는 중이다. 잠시 쉬면서 현재 위치를 지도 위에서 확인하였다. 이 때, 신속하게 고도를 높이려면 어느 방향으로 움직여야 하는지 설명하고, 그 이유를 같이 설명하여라.

문제 3 일변수함수 f 에 대하여, 이변수함수 g 가 관계식 $g(x, y) = f(x + y)$ 을 만족할 때, $\frac{\partial g}{\partial x}$ 와 $\frac{\partial g}{\partial y}$ 사이의 관계식을 구하여라. 함수 $z = g(x, y)$ 의 그래프가 어떤 모습인지 방금 구한 관계식과 관련지어 설명하여라.

문제 4 좌표평면에서 정의된 함수 $F(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

- (1) 역함수 정리를 써라.
- (2) 함수 F 의 치역을 구하여라. 함수 F 가 단사함수인지 살펴보아라.
- (3) 함수 F 의 야코비행렬을 구하고, 이는 항상 가역행렬임을 보여라.
- (4) 함수 F 의 치역에서 점 하나를 잡고, 이 점 근방에서 함수 F 의 역함수 G 를 써라.
- (5) 이 역함수 G 의 야코비행렬을 직접 계산하고 역함수정리를 이용하여 구한 G 의 야코비행렬과 일치하는지 살펴보아라.

문제 5 좌표평면 위의 곡선 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1$ 에 대하여 다음 물음에 답하라

- (1) 곡선 위의 점 (x_0, y_0) 에서 그은 접선의 방정식을 구하여라.
- (2) 원점까지 최대 거리와 최소 거리를 구하여라.

문제 6 두 방정식 $a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0$, $b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0$ 에 의하여 결정된 직선 위의 점 가운데 원점까지 거리가 가장 가까운 점을 구하여라.

문제 7 함수 $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 이 주어져 있다. 임의의 $P \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $H_f(P)$ 가 양부호행렬이면, 임의의 $X, Y \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$f\left(\frac{X+Y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}(f(X) + f(Y))$$

가 성립함을 보여라.

문제 8 길넓이가 1인 직육면체의 부피가 최대인 경우는 언제인가 ?

문제 9 아무 거나 써라.