

다변수해석학 시험

2013 년 6 월 5 일

문제 1 영측도집합의 정의를 쓰고, 셀수없는 영측도 집합의 예를 들어라.

문제 2 집합 $S = \{(x, y) : \sqrt{x} \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq 1\}$ 위에서 적분값 $\int_S \sqrt{1+y^3} dx dy$ 를 구하여라.

문제 3 타원체 $\left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$ 의 부피를 구하여라.

문제 4 영역 \mathbb{R}^3 의 2-곡면 σ 가

$$\sigma(u, v) = (u, v, u^2 + v^2 + 1), \quad (u, v) \in I^2$$

으로 주어졌을 때, $\int_{\sigma} (y dy \wedge dz + z x dz \wedge dx)$ 의 값을 구하여라.

문제 5 영역 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 에서 정의된 2-형식

$$\xi = \frac{x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

과 2-곡면

$$\sigma(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi), \quad 0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(가) 2-곡면 σ 의 기하학적 의미를 설명하고, 경계의 정의에 입각하여 $\partial\sigma$ 를 구하여라.

(나) 적분값 $\int_{\sigma} \xi$ 을 구하여라.

(다) ξ 가 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 에서 닫힌형식임을 보여라.

(라) ξ 가 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 에서 완전형식이 아님을 보여라.

문제 6 영역 Ω 에 있는 임의의 닫힌 1-연쇄 $\sigma \in C_1(\Omega)$ 에 대하여 $\int_{\sigma} \xi = 0$ 이라 가정하자. 영역 Ω 의 한 점 C 를 고정하고, 각 점 $X \in \Omega$ 에 대하여 $\partial\sigma = P - C$ 인 1-곡면 σ 를 택하여

$$\phi(X) = \int_{\sigma} \xi, \quad X \in \Omega$$

라 정의하면 ϕ 가 σ 의 선택에 의존하지 않고, $d\phi = \xi$ 가 성립함을 보여라.

문제 7 다음 명제들이 각각 옳은지 그른지 판단하고, 그 이유를 써라.

(가) 영역 $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ 에 있는 임의의 닫힌 1-형식은 완전형식이다.

(나) 영역 $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ 에 있는 임의의 닫힌 1-형식은 완전형식이다.

문제 8 아무거나 써라.