

해석개론 시험

2013 년 10 월 1 일

문제 1 완비성공리를 써라. 또한, 완비성 공리에 등장하는 용어들의 정의도 같이 써라.

문제 2 완비성 공리를 이용하여 ‘임의의 유계인 단조증가 실수열이 수렴함’을 증명하여라. 또한, ‘임의의 유계 단조증가 실수열이 수렴한다’고 가정하고, 이를 이용하여 완비성 공리를 증명하여라.

문제 3 다음 실수열 $\langle a_n \rangle$ 의 상극한과 하극한을 구하라. (답이 $+\infty$ 또는 $-\infty$ 가 될 수 있다. 답만 써라.)

(가) $a_n = n^2 + n - 1$

(나) $a_n = (-1)^n$

(다) $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k$

(라) $a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{k}{k+1}$

(마) $a_n = \sin n$

문제 4 칸토르집합의 정의를 써라. 칸토르집합은 고립점을 가지지 않음을 보여라. 또한, 셀수 있는 집합의 정의를 쓰고, 칸토르집합이 셀수있는 집합이 아님을 정의에 입각하여 증명하여라.

문제 5 코쉬-쉬바르츠 부등식을 쓰고 증명하여라. 또한, 이 부등식에서 등식에 성립할 필요충분 조건을 써라.

문제 6 다음 집합 $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 에 대하여 A' 을 구하여라. 또한, 각 집합이 열린집합인지, 그리고 닫힌집합인지 각각 답하여라. (답만 써라.)

(가) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$

(나) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$

(다) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{N}\}$

(라) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in \mathbb{Q}\}$

(마) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ 또는 } y \in \mathbb{Q}\}$

(바) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{Q} \text{ 그리고 } y \in \mathbb{Q}\}$

문제 7 아무 거나 써라.