해석개론 시험

2013 년 11 월 7 일

문제 1

(가) 볼짜노-바이어어슈트라스 정리를 쓰고, 이를 이용하여 임의의 유계수열은 항상 수렴하는 부분수열을 가짐을 보여라.

(나) (가)의 결과를 이용하여, 연속함수 $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$은 유계임을 증명하여라.

문제 2 벡터공간 $\mathbb{R}^\nu$의 벡터열 $\langle x_n \rangle$에 대하여, 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$이 수렴하면 $x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$를 만족하는 벡터 $x \in \mathbb{R}^\nu$가 존재함을 보여라.

문제 3 옹골집합의 정의를 쓰고, 이 정의에 입각하여 다음이 옹골집합인지 살펴보아라.

(가) $\left\{ \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\}$ (나) $\left\{ \dfrac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots \right\} \cup \{0\}$ (다) $(0, 1)$

문제 4 함수 $f : X \to Y$에 대하여 다음 두 명제가 동치임을 보여라.

(가) 함수 f가 연속이다.

(나) V가 Y의 열린집합이면 $f^{-1}(V)$는 X의 열린집합이다.

문제 5 함수 $f(x) = x^\alpha$가 구간 $(0, \infty)$ 위에서 고른연속일 실수 α의 조건을 구하여라.

문제 6 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 다음

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} + \alpha x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

과 같이 정의하자.

(가) 함수 f가 미분가능함을 보이고, $f'(0)$을 구하여라.

(나) 함수 f가 $x = 0$에서 증가상태일 α의 조건을 구하여라.

(다) 함수 f가 구간 $(-r, r)$ 위에서 증가함수일 양수 $r > 0$이 존재할 α의 조건을 구하여라.

문제 7 아무거나 써라.

풀지 못한 문제를 풀어서 11월 12일 12:30 까지 제출