해석개론 시험

2013 년 12 월 12 일

문제 1

(가) 상합과 하합을 이용하여 리만적분을 정의하여라.

(나) 연속함수가 리만적분가능함을 증명하여라.

(다) 불연속점들의 집합이 셀수있는 유계함수는 리만적분가능함을 보여라.

(라) 불연속점들의 집합이 셀수없으면서도 리만적분가능한 함수의 예를 들어라.

문제 2 유계함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 과 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{n}{k}\right)\frac{1}{n}$라 정의하자.

(가) 함수 f가 리만적분가능하면 수열 $\langle a_n \rangle$은 적분값 $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$로 수렴함을 보여라.

(나) 수열 $\langle a_n \rangle$이 수렴하지만, 리만적분가능하지 않은 함수의 예를 들어라.

문제 3 '함수를 미분하고 적분하면 자기자신이다'와 '함수를 적분하고 미분하면 자기자신이다'라는 말을 명확하게 기술하고 증명하여라.

문제 4 세 직선 $x = a, x = b, y = 0$과 곡선 $xy = 1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 $L(a, b)$라 하자 (단, $a, b > 0$).

(가) 정적분의 정의를 이용하여, 등식 $L(a, b) = L(ca, cb)$가 성립함을 보여라 (단, $c > 0$).

(나) 임의의 양수 x, y에 대하여 등식 $L(1, xy) = L(1, x) + L(1, y)$가 성립함을 보여라.

문제 5 고른수렴의 정의를 써라. 연속함수열이 고르게 수렴하면 극한함수도 연속임을 증명하여라.

문제 6 다음 함수열 $\langle f_n \rangle$ 들에 대하여 점별수렴하는 집합을 정하고 그 집합 위에서 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 또한, 집합을 줄이면 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 그리고, 그 이유를 써라. 이 때, 다른 정리를 이용하는 경우 그 정리를 쓰고 그 정리가 적용되는 이유를 명확하게 써라.

(가) $f_n(x) = x^n$ (나) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}} \sin kx$ (다) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k} x^k$

문제 7

(가) 등식 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{mn} = \lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{mn}$이 성립하지 않는 이중수열 $\langle a_{mn} \rangle$의 예를 들어라.

(나) 각 $m, n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_{mn} \geq 0$ 이면, $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} a_{mn}$ 이 성립함을 보여라.

문제 8 각 구간 위에서 리만적분가능한 유계함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여 함수열 $\langle f_n \rangle$을 다음과 같이 정의한다.

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-1/n}^{x+1/n} f(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R},\ n = 1, 2, \ldots$$

(가) 각 함수 f_n은 연속임을 보여라. 이 함수가 고른연속이 되는가 살펴보아라.

(나) 함수 f가 연속이면 f_n은 미분가능함수임을 보여라.

(다) 함수열 $\langle f_n \rangle$이 f로 점별수렴하는지 살펴보아라.

(라) 함수 f가 고른연속이면, 함수열 $\langle f_n \rangle$이 f로 고르게 수렴함을 보여라.

문제 9

(가) 등식 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin kx = \frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{(n+1)x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$을 증명하여라.

(나) 디리클렛-데데킨드 판정법을 써라.

(다) 함수항급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx$가 구간 $(0, \pi)$ 위에서 연속함수임을 보여라.