인문사회계를 위한 수학 2 시험

2014 년 10 월 23 일

문제 1 벡터의 내적에 관한 쉬바르쯔 부등식을 쓰고 증명하라. 또한, 이 부등식에서 등호가 성립할 필요충분조건을 써라.

문제 2 다음 두 직선

$$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}, \qquad \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-2} = z$$

이 서로 꼬인 위치에 있음을 설명하여라.

문제 3 매개화된 곡선 $X(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)$ 위의 한 점 $\left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$ 에서 그은 접선의 방정식을 구하여라.

문제 4 다음 일차연립방정식이 딱 하나의 해를 가질 실수 a의 조건을 구하여라.

$$\begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ x + 2y + z &= 3 \\ x + y - (a^2 - 5)z &= a \end{aligned}$$

문제 5 다음 변환이 평면에서 선형변환임을 설명하고 이 변환을 행렬로 표시하여라. 또한, 이 변환이 일대일대응이 되는지 살펴보아라.

(가) 평면에서 원점을 중심으로 하고 시계 반대 방향으로 θ만큼 회전하는 회전변환

(나) 평면에서 원점과 단위원 위의 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$에 의하여 결정되는 직선을 중심으로 하는 대칭변환

(다) 평면에서 원점과 단위원 위의 점 $(\cos\theta, \sin\theta)$에 의하여 결정되는 직선에 떨어지는 정사영

문제 6 다음 이차동차식에 의하여 정의된 함수가 원점에서 최대값을 가지는지, 최소값을 가지는지, 아니면 안장점이 되는지 판정하라.

(가) $f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2$

(나) $f(x, y, z) = xy + yz + zx$

문제 7 다음 대칭행렬에 의하여 주어지는 이차동차식이 원점에서 최소값을 가지게 되는 실수 a의 조건을 구하여라.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

문제 8 아무거나 써라.