인문사회계를 위한 수학 2 시험

2014 년 12 월 11 일

문제 1

(가) '일차함수 $y = ax$ 의 미분이 자기자신이다' 라는 말을 적절하게 해석하여라.

(나) 다변수함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 에서 일변수함수의 미분계수에 해당하는 것이 무엇인가 쓰고, 그 의미를 간단하게 설명하여라.

(다) 다변수함수 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 에서 일변수함수의 이계미분계수에 해당하는 것이 무엇인가 쓰고, 그 의미를 간단하게 설명하여라.

(라) 다변수 벡터함수 $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 에 대하여, 일변수함수의 미분계수에 해당하는 것이 무엇인가 쓰고, 그 의미를 간단하게 설명하여라.

문제 2 다음 함수들에 대하여 극소점, 극대점, 안장점을 모두 구하여라. 또한, 최대값과 최소값을 가지는지 살펴보고, 가지는 경우 그 값을 구하여라.

(가) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2xy$

(나) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2zx$

(다) $f(x, y) = x^3 + y^4 - xy$

(라) $f(x, y) = x^3y - xy^3$

문제 3 쌍곡함수는 다음

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

과 같이 정의되는 함수들이다.

(가) 함수 $x = \cosh t$ 와 $y = \sinh t$ 의 그래프를 그려라.

(나) 등식 $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$ 이 성립함을 보이고, 다음 함수

$$X(t) = (\cosh t, \sinh t)$$

가 나타내는 곡선의 개형을 그려라.

(다) 이 곡선의 매개변수 t 가 위 그림에서 어떤 의미를 가지는지 설명하여라. [힌트: 원점과 $X(t)$ 를 지나는 직선, x 축, 그리고 곡선으로 둘러싸인 도형의 면적을 생각한다.]

(라) 곡선 $xy = 1$ (단, $x > 0$)을 매개변수로 표현하여라.

문제 4 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 (xy^3)\, dxdy$

(나) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1 - x^2}\, dxdy$

문제 5 조건 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 을 만족하는 실수 x, y, z 들에 대하여 함수 $xy + yz + zx$ 의 최대값과 최소값을 구하여라.

문제 6

(가) 좌표평면의 세 점 $(1, 1), (1, 3), (3, 1)$ 을 꼭지점으로 하는 삼각형 위에서 이변수함수 $f(x, y) = x - y$ 의 적분값을 구하여라.

(나) 좌표공간의 평면 $x + y = \pm 1$, $y + z = \pm 1$, $z + x = \pm 1$ 로 둘러싸인 육면체의 부피를 구하여라.

문제 7 극한값 $\displaystyle\lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x^2}\, dx$ 의 값을 구하라.

문제 8 아무거나 써라.