해석개론 2 시험

2015 년 10 월 5 일

1.

(가) 고름 수렴의 정의를 써라.

(나) 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 로 고르게 수렴할 때, 함수 f 가 연속임을 보이라.

(다) 연속함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 함수 f 로 고르게 수렴하고, $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ 임을 보이라.

2. 다음 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 주어진 구간 위에서 고르게 수렴하는지 살펴보고 그 이유를 써라. 기존의 정리를 이용하는 경우 그 정리를 명확하게 진술하고, 정리가 적용되는 이유를 명확하게 밝히라.

(가) $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^2}, \qquad 0 \le x \le 1$

(나) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}\, x^k, \qquad 0 \le x \le 1$

(다) $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+k^2x}, \qquad 0 < x < \infty$

3. 함수 $f(x) = \max\{0, 1-|x-1|\}$ 과 단조감소하는 수열 $\langle a_n \rangle$ 에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(x-2n)$ 이 $\mathbb{R}$ 위에서 고르게 수렴할 $\langle a_n \rangle$ 의 필요충분조건을 찾고 이를 증명하라.

(나) 급수 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n f(nx)$ 가 $\mathbb{R}$ 위에서 고르게 수렴할 $\langle a_n \rangle$ 의 필요충분조건을 찾고 이를 증명하라.

(다) $g_n(x) = a_n f(nx)$ 라 두고, 함수족 $\{g_n : n = 1, 2, \dots\}$ 가 $\mathbb{R}$ 위에서 동등연속일 $\langle a_n \rangle$ 의 필요충분조건을 찾고 이를 증명하라.

4. 복소내적공간의 코시–쉬바르쯔 부등식을 쓰고 증명하라.

5. 등식 $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{9} - \cdots = \dfrac{\pi}{4}$ 을 증명하라. 증명과정에서 사용한 정리가 있으면 이를 명확하게 써라.

6. 함수열 $\langle P_n \rangle$ 이 다음 세 조건

(i) $-1 \le x \le 1$ 일 때 $P_n(t) \ge 0$ 이다.

(ii) 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)\, dt = 1$ 이다.

(iii) 임의의 $\delta \in (0,1)$ 에 대하여 함수열 $\langle P_n \rangle$ 은 집합 $[-1, -\delta] \cup [\delta, 1]$ 위에서 0 으로 고르게 수렴한다.

을 만족한다고 가정하자. 이 때, 주기가 2 인 연속주기함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여

$$f_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t) P_n(t)\, dt, \qquad x \in \mathbb{R}$$

이라 정의하면, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 은 f 로 고르게 수렴함을 증명하라.

7. 아무 거나 써라.