해석개론 2 시험

2015 년 11 월 9 일

1. 유한개의 항을 제외한 모든 항의 값이 0 인 수열 전체의 벡터공간을 F 라 하고, 이 벡터공간에 노음 $\|x\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|$ 을 부여하자.
   (가) 이 공간이 완비공간이 아님을 보이라.
   (나) 이 공간을 포함하면서 가장 작은 완비공간이 무엇인가 답하라.

2. 다음 특이적분이 수렴하는 양수 p 의 범위를 구하라.
   (가) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x^p}\, dx$
   (나) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{|\cos x|}{x^p}\, dx$

3. 임의의 실수 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 등식
$$\int_0^{\infty} e^{-t^2} \cos 2tx\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} e^{-x^2}$$
   이 성립함을 보이라. [힌트: $f'(x) + 2xf(x) = 0$]

4. 감마함수 $y = \Gamma(x)$ 의 정의를 쓰고, 이 함수가 연속임을 보이라. 또한, 임의의 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $\Gamma(n) = (n-1)!$ 임을 보이라.

5. 유계함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $f_n = f * \left(\frac{n}{2}\chi_{[-1/n,1/n]}\right)$ 이라 두자.
   (가) 만일 f 가 연속이면, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 점별 수렴함을 보이라.
   (나) 만일 f 가 고른연속이면, 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 고르게 수렴함을 보이라.
   (다) 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 점별 수렴하지 않는 함수 f 의 예를 들라.

6.
   (가) 푸리에계수의 정의를 쓰고, 푸리에계수를 그렇게 정의하는 이유를 설명하라.
   (나) 디리끌렛 핵 $\langle D_n \rangle$ 의 정의를 쓰고 그 푸리에 계수를 구하라.
   (다) 리만–르벡 정리를 쓰고 증명하라.
   (라) 주기함수 $y = f(x)$ 의 푸리에급수 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_n e^{ikx}$ 의 점별 수렴여부나 수렴값이 왜 주어진 점 x 의 근방의 함수값에만 의존하는지 명확하게 기술하고 이를 증명하라.

7. 임의의 실수 $x \in (0, 2\pi)$ 에 대하여 다음 등식
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin nx = \frac{\pi - x}{2}$$
   이 성립함을 증명하라. 증명 과정에서 사용한 정리가 있으면 이를 명확하게 쓰고 이 정리가 어떻게 적용되는지 밝혀라.

8. 아무 거나 써라.