해석개론 2 시험

2015 년 12 월 9 일

1. 디리끌렛 핵과 페제르 핵에 대한 다음 물음에 답하라.
   (가) 디리클렛핵 $\langle D_n \rangle$ 과 페제르핵 $\langle K_n \rangle$ 의 정의를 써라.
   (나) 함수 D_n 과 K_n 의 푸리에계수를 구하라.
   (다) 위 정의에 근거하여 $\|K_n\|_1 = 1$ 임을 보이라. 반면 $\lim_{n\to\infty} \|D_n\|_1 = \infty$ 임을 보이라.
   (라) 푸리에급수의 수렴과 관련하여 디리클렛핵과 페제르핵의 성질 및 역할의 차이점에 대하여 아는 바를 써라.

2. 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 함수 $f(x) = x$ 의 푸리에급수

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx, \qquad x \in [-\pi, \pi]$$

   를 이용하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 의 값을 구하라. 또한, 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 함수 $f(x) = x^2$ 의 푸리에 급수를 구하고, 이를 이용하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 의 값을 구하라.

3. 빠른감소수열의 정의를 써라. 또한, C^∞-주기함수와 빠른감소수열이 대응함을 명확하게 기술하고 이를 증명하라.

4. 잴수있는 함수의 정의를 쓰고, 잴수있는 함수열의 점별극한은 잴수있는 함수임을 보이라.

5. 단조수렴정리, 파투정리, 르벡수렴정리 및 레비정리를 써라. 또한, 파투전리를 이용하여 르벡수렴정리를 증명하라.

6. 실수 $\alpha \in (0,1)$을 고정하자. 단위구간 $[0,1]$ 의 한 가운데에서 길이가 $\frac{\alpha}{3}$ 인 열린구간을 들어내고 남는 집합을 D_1이라 두면 D_1은 두 닫힌구간으로 구성된다. 두 닫힌구간의 각 구간 한 가운데에서 다시 길이가 $\frac{\alpha}{3^2}$ 인 열린구간을 들어내고 남는 집합을 D_2 라 하자. D_2의 네 닫힌구간의 각 구간에서 다시 길이가 $\frac{\alpha}{3^3}$ 인 한 가운데 열린구간들을 들어내고 남는 집합을 D_3 라 하자. 이러한 방식을 계속 적용하여 집합열 $\langle D_n \rangle$ 을 얻었을 때, $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} D_n$ 이라 두자.
   (가) 집합 D 가 잴수있는 집합임을 보이고 그 측도를 구하라.
   (나) 수열 $\langle \chi_{D_n} \rangle$ 는 노음공간 $\mathcal{R}^1[0,1]$ 에서 코시수열임을 보이라.
   (다) 수열 $\langle \chi_{D_n} \rangle$ 는 노음공간 $L^1[0,1]$ 에서 어떤 함수로 수렴하는가 답하라.
   (라) 수열 $\langle \chi_{D_n} \rangle$ 는 노음공간 $\mathcal{R}^1[0,1]$ 에서 수렴하지 않음을 보이라.

7. 함수공간 $L^2[-\pi, \pi]$와 수열공간 $\ell^2(\mathbb{Z})$가 대응함을 명확하게 기술하라. 또한, 이 과정에서 르벡적분이 어떻게 활용되는지 설명하라.

8. 길이가 일정한 C^1-단일폐곡선으로 둘러싸인 평면 위의 도형 가운데 그 넓이가 가장 큰 것은 원임을 증명하여라.

9. 아무거나 써라.