해석개론 1 시험

2016 년 4 월 4 일

1. 완비성공리를 써라, 또한, 이 공리를 서술하는 데에 나오는 용어의 정의도 써라.

2. 함수 $f, g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 등식

$$\sup\{f(m,n) : m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\} = \sup\{\sup\{f(m,n) : m \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\}$$

   이 성립하는지 살펴보아라. 단, 위로 유계가 아닌 집합 A에 대하여 $\sup A = +\infty$로 정의한다.

3. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$의 정의 를 쓰고, 그 부정을 써라. 또한, 코시수열의 정의를 쓰고, 그 부정을 써라.

4. 다음 수열 $\langle a_n \rangle$이 수렴하는지 살펴보아라. 또한, 수렴하는 경우 그 극한값을 구하고, 수렴하지 않는 경우에는 그 상극한과 하극한을 구하여라.
   (가) $a_n = \sin \frac{n\pi}{2} \cos \frac{(n+1)\pi}{2}$
   (나) $a_n = \sin n$

5. 집합 $A \subset \mathbb{R}^\nu$에 대하여 그 여집합 $\mathbb{R}^\nu \setminus A$ 를 A^c로 표시하자.
   (가) 임의의 집합 A에 대하여 $\overline{A^c} = (\operatorname{int} A)^c$가 성립함을 보여라.
   (나) 등식 $\operatorname{int}(A^c) = (\overline{A})^c$가 항상 성립하는지 살펴보아라.

6. 볼짜노-바이에르쉬트라쓰 정리를 써라. 또한, 볼짜노-바이에르쉬트라쓰 정리를 이용하여 임의의 유계 단조증가 수열이 수렴함을 증명하여라.

7. 실수열 $\langle x_n \rangle$이 다음 성질

$$x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1} < \cdots < x_{2n} \cdots < x_4 < x_2$$

   를 만족한다고 하자. 이 수열이 코시수열일 필요충분조건은 $\lim_{n\to\infty}(x_{2n} - x_{2n-1}) = 0$임을 보여라.

8. 아무 거나 써라.