

# 해석개론 1 시험

2016 년 6 월 8 일

1. 사인함수의 테일러 전개와 다항식의 근과 계수의 관계를 이용하여 다음 두 급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$$

의 값을 추정하라.

2. 리만적분에 대한 다음 물음에 답하라.

(가) 상합과 하합을 이용하여 리만적분을 정의하라.

(나) 이를 이용하여 연속함수가 항상 리만적분가능함을 보이라.

(다) 구분구적법의 극한은 존재하지만 리만적분가능하지 않은 유계함수의 예를 들어라.

3. 불연속점 전체의 집합이 셀수없는 무한집이지만, 리만적분가능한 함수의 예를 들어라.

4. 함수를 미분하는 것과 적분하는 것이 서로 역산 관계임을 명확하게 진술하고, 이를 증명하라.

5. 유계변함수  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  에 대하여  $V(x) = V_a^x(f)$ 라 정의하자.

(가) 함수  $f$ 가 연속이면  $V$ 도 연속임을 보이라.

(나) 함수  $f$ 가 미분가능할 때  $V$ 도 미분가능한지 살펴보아라.

6. 유계함수  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  와 유계변동함수  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 두 극한

$$\lim_{P \nearrow} S_a^b(f, P, \alpha) = A, \quad \lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_a^b(f, P, \alpha) = B$$

을 생각하자.

(가) 두 극한의 의미를 명확하게 정의하라.

(나) 두 극한의 존재 여부가 달라지는 예를 들어라.

(다) 함수  $f$ 가 연속이면 두 극한의 존재 여부와 극한값이 일치함을 보이라.

7. 다음 적분값을 구하라.

(가)  $\int_{-1}^1 x d|x|$

(나)  $\int_0^1 x d\left[\frac{1}{1/x}\right]$

(다)  $\int_{-\pi}^{\pi} x d\cos x$

8. 아무거나 써라.