해석개론 1 시험

2017 년 5 월 2 일

1. 급수 $\sum_{n=1}^{n} a_n$이 절대수렴할 때, 임의의 양수 $\alpha > 0$에 대하여 급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\alpha + a_n}$도 절대수렴함을 보여라. (단, $a_n \neq -\alpha$)

2. 옹골집합의 정의를 써라. 이 정의에 입각하여 집합 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$이 옹골집합임을 증명하여라. 또한, 집합 $\{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \ldots\}$은 옹골집합이 아님을 증명하여라.

3. 함수 $f : X \to Y$가 연속이면, 임의의 $C \subset X$에 대하여 $f(\overline{C}) \subset \overline{f(C)}$가 성립함을 보여라. 이 명제의 역이 성립하는지 살펴보아라.

4. 연속함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 세 명제가 동치임을 보여라.
   (가) f는 고른연속이다.
   (나) $x_n \in (a, b)$이고 $\langle x_n \rangle$이 코시수열이면 $\langle f(x_n) \rangle$도 코시수열이다.
   (다) 좌극한 $\lim_{x \to a^+} f(x)$와 우극한 $\lim_{x \to b^-} f(x)$가 존재한다.

5. 각 자연수 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여, $g_n(x) = \max\{1 - n|x - n|, 0\}$이라 두고, 수열 $\langle a_n \rangle$에 대하여

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(x), \qquad x \in \mathbb{R}$$

   이라 정의하자. 함수 f가 고른연속이기 위한 수열 $\langle a_n \rangle$의 필요충분조건을 구하여라.

6. 열린구간에서 정의된 함수 f가 정의역의 한 점 c에 대하여 다음

$$0 < h < \delta \implies f(c - h) < f(c) < f(c + h)$$

   이 성립하는 $\delta > 0$가 존재할 때, 함수 f가 점 c에서 증가상태라고 말한다. 함수 $f : (a, b) \to \mathbb{R}$가 정의역의 모든 점에서 증가상태이면 f는 증가함수임을 보여라.

7. 아무 거나 써라.