해석개론 1 시험

2017 년 6 월 8 일

1. 함수 $f : [0,1) \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 두 성질을 생각하자.

   (가) 임의의 $a \in [0,1)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재한다.

   (나) 함수 f가 $[0,1)$ 위에서 연속이고, 임의의 $a \in (0,1)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$이 존재한다.

   성질 (가)를 만족하는 함수 f는 성질 (나)도 만족함을 보여라. 성질 (나)는 만족하지만 (가)를 만족하지 않는 함수의 예를 들어라.

2. 함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$이 원시함수를 가지면, 구간 $I \subset [a,b]$의 상 $f(I)$가 항상 구간임을 증명하여라. 또한 구간의 상이 항상 구간이지만 불연속인 함수의 예를 들어라.

3. 미분가능한 함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 물음에 답하라.

   (가) 도함수 f'이 유계이면 f는 유계변동함수임을 보여라.

   (나) f가 유계변동함수이면 그 도함수 f'은 항상 유계인가?

4. 구간 $[0,1]$ 위에서 정의된 연속함수 전체의 벡터공간을 V 라 하자.

   (가) 리만적분 $f \mapsto \int_0^1 f : V \to \mathbb{R}$이 선형사상임을 보여라.

   (나) $f \mapsto f(0) : V \to \mathbb{R}$이 선형사상임을 보여라.

   (다) 선형사상 $f \mapsto f(0)$를 적분으로 설명하여라.

5. 유계함수 $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ 와 실수 $A \in \mathbb{R}$에 대하여, 다음 두 가지 극한

$$\lim_{P\nearrow} R_a^b(f,P) = A, \qquad \lim_{\|P\|\to 0} R_a^b(f,P) = A$$

   을 생각하자.

   (가) 두 극한의 의미를 명확하게 서술하고, 두 극한의 존재가 서로 동치임을 보여라.

   (나) 두 극한값이 존재하는 경우 구분구적법에 의한 극한이 존재함을 보여라. 그 역은 성립하지 않는 예를 들어라.

   (다) 위 극한에서 리만합을 리만-스틸체스합 $S_a^b(f,P,\alpha)$ 로 바꾸면, 두 극한값의 존재 여부가 어떻게 되는지 예를 들어 설명하여라.

   (라) 함수 f 가 연속이면 리만-스틸체스합 $S_a^b(f,P,\alpha)$ 에 대해서도 두 극한의 의미가 같음을 보여라.

6. 다음 적분값을 구하라.

   (가) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x\, d|x|$ (나) $\displaystyle\int_0^1 d\frac{1}{[1/x]}$ (다) $\displaystyle\int_{-1}^{1} d(-e^{|x|})$

7. 아무 거나 써라.