해석개론 2 시험

2017 년 10 월 12 일

1. 옹골집합 X 에 대하여, 연속함수공간 $C(X)$ 에서

$$\|f\|_{\sup} = \sup\{|f(x)| : x \in X\}, \qquad f \in C(X)$$

라 정의하였을 때, 다음 물음에 답하여라.

(가) $f \mapsto \|f\|_{\sup}$ 이 노음임을 보여라.

(나) $f_n \in C(X)$ 이고 $\lim_n \|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ 이면 $f \in C(X)$ 임을 보여라.

(다) $\langle f_n \rangle$ 이 $C(X)$ 안에서 코시 수열이면 $C(X)$ 안에서 수렴함을 보여라.

(라) $\lim_n \|f_n - f\|_{\sup} \to 0$ 이고 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 이면 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_n) = f(x)$ 임을 보여라.

2. 해석함수 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$의 수렴반경이 $R > 0$이라 하자. 이 함수의 해집합

$$Z = \{x \in (-R, +R) : f(x) = 0\}$$

이 극한점을 가지면, f는 상수함수 $f \equiv 0$임을 보여라. [힌트: 롤의 정리]

3. $A_0 = 0$, $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 일 때, 다음 물음에 답하여라.

(가) 등식 $\sum\limits_{k=m+1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - A_m b_{m+1} - \sum\limits_{k=m+1}^{n} A_k (b_{k+1} - b_k)$ 를 보여라.

(나) 급수 $\sum a_n$의 부분합 수열이 유계이고, $\langle b_n \rangle$이 단조감소하여 0으로 수렴하면, 급수 $\sum a_n b_n$이 수렴함을 보여라.

(다) 급수 $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} \cdots$가 수렴함을 보여라.

4. 함수 $f(x) = \max\{0, 1 - |x - 1|\}$과 단조감소하는 양수열 $\langle a_n \rangle$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 급수 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n f(x - 2n)$이 $\mathbb{R}$ 위에서 고르게 수렴할 $\langle a_n \rangle$의 필요충분조건을 찾고 이를 증명하라.

(나) $g_n(x) = a_n f(nx)$라 두었을 때, 함수족 $\{g_n : n = 1, 2, \ldots\}$가 $\mathbb{R}$ 위에서 동등연속일 $\langle a_n \rangle$의 필요충분조건을 찾고 이를 증명하라.

5. 수열공간 $\ell^2(\mathbb{N})$에 대하여 다음 물음에 답하라.

(가) 내적을 정의하고 코시-쉬바르쯔 부등식이 성립함을 보여라.

(나) 임의의 코시 수열이 수렴함을 보여라.

(다) 유계수열이지만, 수렴하는 부분수열을 가지지 않는 수열의 예를 들어라.

(라) 각 $n = 1, 2, \ldots$에 대하여 $\alpha_n > 0$인 수열 $\langle \alpha_n \rangle$에 대하여, 다음 집합

$$K = \{a \in \ell^2(\mathbb{N}) : |a(n)| \le \alpha_n\}$$

가 옹골집합이면 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2 < \infty$임을 보여라.

6. 아무 거나 써라.