해석개론 2 시험

2017 년 11 월 14 일

1. 다음 특이적분 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx$ 이 수렴하는 양수 p, q의 값들을 구하여라.

2. 내적공간 $\mathcal{R}^2[-1,1]$에서 다음 성질을 만족하는 다항식 P_0, P_1, P_2를 구하여라.
   - 각 $n = 0, 1, 2$에 대하여 P_n은 n-차 다항식이다,
   - P_0, P_1, P_2 는 길이가 1이고, 서로 수직이다.

3.
   (가) 각 실수 $x \in (0, \infty)$ 에 대하여, 다음 등식
   $$\int_0^\infty e^{-tx}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2} - \arctan x$$
   이 성립함을 보이라. 이 과정에서 사용한 정리가 있으면 이를 명확하게 기술하고, 이 정리가 어떻게 적용되었는지 밝혀라.
   (나) 등식 $\displaystyle\lim_{A\to\infty}\int_0^A \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$가 성립함을 보여라.

4.
   (가) 감마함수 $\Gamma(x)$와 베타함수 $B(x,y)$의 정의를 써라.
   (나) 양수 $x, y > 0$에 대하여 등식 $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$이 성립함을 설명하여라.
   (다) $\Gamma(\frac{1}{2})$의 값을 구하고, 이를 이용하여 특이적분 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$의 값을 구하여라.

5.
   (가) 함수 $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$의 푸리에계수 $\widehat{f}(n)$의 정의를 써라.
   (나) 다음 문장의 의미를 명확하게 기술하고, 왜 그런지 이유를 설명하여라.
   - 함수 f와 삼각다항식 $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} a_k e^{\mathrm{i}kx}$가 가장 가까워지는 때가 $a_k = \widehat{f}(k)$이다.

6.
   (가) 디리끌렛 핵 $\langle D_n \rangle$의 정의를 쓰고, 함수 D_n의 푸리에 계수를 구하여라.
   (나) 수열 $\langle \|D_n\|_1 \rangle$이 발산함을 보여라.

7. 함수 $f(x) = \chi_{[a,b]}$에 대하여 다음 물음에 답하여라. (단, $[a,b] \subset (-\pi, \pi)$) 이다)
   (가) 이 함수의 푸리에급수를 구하여라.
   (나) 어떤 x에 대하여 푸리에급수가 $f(x)$로 수렴하는지 살펴보아라. 이 때 사용된 정리를 명확하게 기술하고 그 정리가 적용된 사유를 함께 써라.
   (다) 어떤 x에 대하여 푸리에급수가 절대수렴하는지 살펴보아라.

8. 아무 거나 써라.