

해석개론 2 시험

2017 년 12 월 14 일

문제 1 페제르 핵 $\langle K_n \rangle$ 의 정의를 쓰고, 주기함수 K_n 의 푸리에 계수를 구하여라. 함수열 $\langle K_n \rangle$ 의 극한을 어떻게 해석할 수 있는지 논의하여라.

문제 2

(가) 주기함수에 관한 빠세발 등식을 써라.

(나) 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 푸리에급수 $\frac{x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin nx$ 를 이용하여

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 의 값을 구하라.

(다) 구간 $[-\pi, \pi]$ 위에서 함수 $f(x) = x^2$ 의 푸리에 급수를 구하고, 이를 이용하여 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 의 값을 구하라.

문제 3 수열 $c: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ 에 대하여 다음 두 조건

$$(1) \lim_{n \rightarrow \pm\infty} |n|^k |c_n| = 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots \quad (2) \limsup_{n \rightarrow \pm\infty} |c_n|^{\frac{1}{|n|}} < 1$$

을 생각하자.

(가) 수열 c 가 조건 (1) 을 만족하면 함수 $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ 가 C^∞ -함수임을 보여라.

(나) 함수 $f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ 가 C^∞ 이면 수열 c 가 조건 (1) 을 만족함을 보여라.

(다) 조건 (2) 를 만족하는 수열은 조건 (1) 도 만족함을 보여라.

(라) 수열 $c_n = e^{-|n|^\alpha}$ 가 조건 (1) 및 조건 (2) 를 만족할 양수 α 의 조건을 각각 구하여라.

문제 4 실수집합 $S \subset \mathbb{R}$ 에 대하여 그 길이 $\mu(S)$ 의 정의를 써라. 또한, 이 정의에 입각하여 칸토르 집합 K 의 길이 $\mu(K)$ 를 구하라.

문제 5 켈수있는 함수의 정의를 쓰고, 켈수있는 두 함수의 합과 곱이 켈수있음을 보여라.

문제 6 구간 $[0, 1]$ 위에서 르벡적분가능한 함수열 $\langle f_n \rangle$ 과 f 에 대하여 다음 두 조건들을 생각하자.

(1) 거의 모든 $x \in [0, 1]$ 에 대하여 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ 이다.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_1 = 0$ 이다.

이 때, (1) \implies (2), 그리고 (2) \implies (1) 이 성립하지 않는 예를 각각 들어라. 조건을 추가하여 인과 관계가 성립하도록 할 수 있는지 살펴보아라.

문제 7 푸리에 변환 $f \mapsto \hat{f}$ 는 내적공간 $L^2[-\pi, \pi]$ 에서 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 로 가는 전사사상임을 보여라.

문제 8 아무거나 써라.