복소함수론 1 중간고사

2018 년 4 월 18 일

1. 복소수 $\alpha = a + ib$가 주어져 있을 때(단, $\alpha \neq 0$), 일차함수 $w = \alpha z$를 평면변환 $T_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$로 이해하고 다음 물음에 답하여라.
   - (가) T_α가 선형변환임을 보여라. 즉, 임의의 $X, Y \in \mathbb{R}^2$와 실수 c에 대하여 등식 $T_\alpha(X+Y) = T_\alpha(X) + T_\alpha(Y)$와 $T_\alpha(cX) = cT_\alpha(X)$가 성립함을 보여라.
   - (나) 변환 T_α를 2×2 행렬로 나타내어라.
   - (다) 임의의 0 아닌 벡테 $X, Y \in \mathbb{R}^2$에 대하여 등식 $\left\langle \frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right\rangle = \left\langle \frac{T_\alpha X}{\|T_\alpha X\|}, \frac{T_\alpha Y}{\|T_\alpha Y\|} \right\rangle$을 증명하여라. 여기에서, $\langle X, Y\rangle$은 X와 Y의 내적이다.
   - (라) 평면 사이의 선형변환 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 가운데, 임의의 $X, Y \in \mathbb{R}^2$에 대하여 등식 $\left\langle \frac{X}{\|X\|}, \frac{Y}{\|Y\|} \right\rangle = \left\langle \frac{TX}{\|TX\|}, \frac{TY}{\|TY\|} \right\rangle$이 성립하는 것들을 모두 찾아라.
   - (마) 다음 문장 "복소일차함수 $w = \alpha z$에 의하여 주어지는 평면변환은 각도를 보존한다"가 무슨 의미인지 설명하여라.
   - (바) 다음 문장 "평면 사이의 선형변환들 가운데 각도를 보존하는 것은 일차복소함수로 표현할 수 있다"가 무슨 의미인지 설명하여라.

2. 반평면 $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$을 단위원 내부 $\{z : |z| < 1\}$로 보내는 일차분수함수를 모두 찾아라.

3. 임의의 복소수 $z = x + iy$에 대하여 $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$라 정의하자.
   - (가) 복소함수 $f(z) = e^z$가 복소평면 위에서 미분가능함을 보이고, 그 도함수를 구하여라.
   - (나) $\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$, $\Omega_2 = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ \operatorname{Re} z \leq 0\}$라 하면 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$는 전단사함수임을 보여라.
   - (다) 함수 $f : \Omega_1 \to \Omega_2$의 역함수를 $g : \Omega_2 \to \Omega_1$라 쓰자. 함수 $z = g(w)$가 Ω_2 위에서 미분가능함을 보이고 그 도함수를 구하여라.
   - (라) 함수 g를 이용하여 Ω_2 위에서 함수 $h(z) = \sqrt{z}$를 정의하고, 함수 h의 치역을 구하여라.

4. 다음 함수 $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$에 대하여 $f = u + iv$가 해석함수가 되는 함수 $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$가 존재하는지 밝히고, 존재하는 경우 그러한 함수 v를 모두 찾아라.
   - (가) $u(x + iy) = y$
   - (나) $u(x + iy) = x + e^{-x} \cos y$

5. 다음 명제 "멱급수로 정의된 함수는 해석함수이다"를 명확하게 서술하고, 이를 증명하여라.

6. 아무 거나 써라.