복소함수론 1 기말고사

2018 년 6 월 11 일

1. 영역 Ω에서 정의된 해석함수 $f(z)$ 가 다음 성질을 만족한다고 하자: 영역 Ω 안에 들어가는 임의의 직사각형 R의 경계 ∂R 위에서 $\int_{\partial R} f(z)dz = 0$이다. 이 때, 함수 $f(z)$의 원시함수를 적분으로 표시하고, 실제로 원시함수임을 보여라.

2. 단순연결영역 Ω 위에서 정의된 함수 $f(z)$에 대하여, "함수 $f(z)$가 Ω 위에서 미분가능하다"와 동치인 명제를 아는대로 써라.

3. 영역 $\Omega = \{z : \operatorname{Im} z \neq 0\} \cup \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ 위에서 함수 $f(z)$를 다음

$$f(z) = \int_{[0,z]} \frac{d\zeta}{1+\zeta^2}, \qquad z \in \Omega$$

과 같이 정의하자. 단, $[0,z]$는 0에서 z까지 선분을 나타낸다. 원점에서 이 함수의 멱급수 전개를 구하고, 이 멱급수가 수렴하는 복소수를 모두 찾아라.

4. 복소평면 전체에서 정의된 해석함수들 가운데, 임의의 $z \in \mathbb{C}$에 대하여 부등식 $|f''(z)| \leq |z|$을 만족하는 것들을 모두 찾아라.

5. 삼각급수 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n e^{int}$가 다음 조건

$$\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{1/|n|} < 1, \qquad \limsup_{n\to-\infty} |a_n|^{1/|n|} < 1$$

을 만족하면 이 삼각급수는 실직선 위에서 해석함수가 됨을 보여라.

6. 특이적분 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$의 값을 구하여라.

7. 방정식 $z^4 - 6z + 3 = 0$의 근들이 복소평면 어디쯤 있는지 살펴보아라.

8. 아무 거나 써라.