실변수함수론 시험

2019 년 4 월 1 일

1. 각 실수 $x \in [0,1)$ 를 십진법에 의한 소수로 표현하되, 두 가지 방법이 있으면 유한개를 제외한 자릿수가 0 이 되도록 한다. 이 때, 다음 집합들의 측도를 구하여라.

   (가) 0 이 등장하지 않는 실수들을 모은 집합 A,

   (나) 짝수번째 자리에서 처음으로 0 아닌 수가 등장하는 수들의 집합 B.

2.

   (가) "잴수있는" 함수와 "르벡적분가능" 함수의 정의를 써라.

   (나) 잴수있는 함수열의 점별극한 함수는 잴수있는 함수임을 증명하여라.

   (다) 르벡적분가능함수열의 점별극한이 르벡적분가능함수인지 살펴보아라.

3. 다음 명제들에 대하여 참인지 거짓인지 판단하고 그 이유를 밝혀라.

   (가) 연속함수 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 이 르벡적분가능하면 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이다.

   (나) 고른연속함수 $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ 이 르벡적분가능하면 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 이다.

4.

   (가) 단조수렴정리와 파투정리 및 르벡수렴정리를 써라.

   (나) 유계구간 $[a,b]$ 에서 정의된 고른유계 함수열 $\langle f_n \rangle$ 이 f 로 점별수렴하면 적분값 $\int_a^b f_n$ 는 $\int_a^b f$ 로 수렴함을 보여라.

   (다) 유계구간 $[a,b]$ 에서 정의된 고른유계 함수열 $\langle f_n \rangle$ 의 적분값 $\int_a^b f_n$ 이 0 으로 수렴하지만, 임의의 $x \in [a,b]$ 에 대하여 수열 $\langle f_n(x) : n = 1,2,\dots \rangle$ 이 수렴하지 않는 예를 들어라.

5.

   (가) 절대연속의 정의를 써라.

   (나) 칸토르함수 $\phi : [0,1] \to [0,1]$ 의 정의를 써라.

   (다) 칸토르함수가 고른연속이지만 절대연속은 아님을 보여라.

   (라) 르벡적분의 정의를 이용하여 적분값 $\int_0^1 \phi$ 를 구하여라.

   (마) 잴수있는집합을 잴수없는 집합으로 보내는 연속함수의 예를 들어라.

6. 미분과 적분이 서로 역산임을 말하는 미적분학의 기본정리를 르벡측도론 입장에서 서술하여라.

7. 아무 거나 써라.