실변수함수론 시험

2019 년 5 월 8 일

1. 임의의 집합 X 와 함수 $f : X \to [0, \infty)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
   (가) $\sum_{x \in X} f(x)$ 의 정의를 써라.
   (나) 이 정의가 X 의 유한 부분집합 F 에 대한 유한합 $\sum_{x \in F} f(x)$ 과 어떻게 관련되는지 설명하여라.
   (다) 함수 $f : X \to \mathbb{C}$ 에 대하여 $\sum_{x \in X} f(x)$ 의 정의를 써라.

2. 만일 $1 \leq p < q \leq \infty$ 이면 $L^p[0,1] \supsetneq L^q[0,1]$임을 보여라.

3. 구간 $[0,1]$ 에서 정의된 잴수있는 복소함수열 $\langle f_n \rangle$과 잴수있는 함수 f에 대하여 다음이 동치임을 보여라.
   (가) 임의의 양수 $\varepsilon > 0$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \mu(\{x \in [0,1] : |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$ 이다.
   (나) $\langle f_n \rangle$ 의 임의의 부분수열이 거의 모든 점에서 f로 점별수렴하는 부분수열을 가진다.

4. 이변수 함수 $f : [1, \infty) \times [1, \infty) \to \mathbb{R}$에 대하여 다음 물음에 답하라.
   (가) 이 함수에 대한 토넬리-푸비니 정리를 써라.
   (나) 함수 $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$ 에 대하여 두 가지 반복적분의 값을 구하고, 토넬리 정리 및 푸비니 정리의 가정과 어떤 관련이 있는지 설명하여라.

5. 바나하대수 $L^1(\mathbb{T})$는 곱하기에 대한 항등원을 가지지 않음을 보여라.

6. 함수열 $\langle h_n \rangle$ 이 다음 성질들
   - 임의의 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $h_n \geq 0$ 이다,
   - 임의의 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $\int_{\mathbb{T}} h_n = 1$ 이다,
   - 임의의 $\delta > 0$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{T} \setminus [-\delta, \delta]} h_n = 0$ 이다

   을 만족한다고 가정하자.
   (가) 임의의 $f \in L^1(\mathbb{T})$에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \|f - f * h_n\|_1 = 0$ 임을 보여라.
   (나) 임의의 $f \in C(\mathbb{T})$ 에 대하여 $\lim_{n \to \infty} \|f - f * h_n\|_\infty = 0$ 임을 보여라.

7. 아무 거나 써라.