실변수함수론 시험

2019 년 6 월 10 일

1. 르벡적분가능함수 $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
   (가) 푸리에변환 $\widehat{f}$ 의 정의를 써라.
   (나) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ 임을 보여라.
   (다) 등식 $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$ 가 성립함을 보여라.
   (라) 함수 $f(x) = e^{-x^2/2}$ 의 푸리에변환을 구하여라.

2. 노음공간 X 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
   (가) 쌍대공간 X^* 의 정의를 써라.
   (나) $1 < p, q < \infty$ 이고 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ 일 때, $(\ell^p)^* = \ell^q$ 임을 보여라.
   (다) $\ell^1 \subsetneq (\ell^\infty)^*$ 임을 보여라.
   (라) 힐버트공간의 쌍대공간을 자기자신이다. 이를 명확하게 진술하여라.

3. 다음을 증명하여라. 증명 과정에서 사용한 정리가 있으면 이 정리를 명확하게 쓰고, 이 정리가 어떻게 적용되었는지 밝혀라.
   (가) 푸리에 변환 $f \mapsto \widehat{f} : L^1(\mathbb{T}) \to c_0(\mathbb{Z})$ 는 전사함수가 아니다.
   (나) 푸리에급수가 점별수렴하지 않는 연속주기함수가 존재한다.

4. 함수 $f(x) = e^{-|x|}$ 의 푸리에 변환을 구하고, 이를 이용하여 각 $n = 2, 3, 4, \ldots$ 에 대하여 적분값 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\alpha}{(1+\alpha^2)^n}$ 의 값을 구하여라.

5. 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
   (가) 각 무리수점에서는 연속이고 각 유리수점에서는 불연속인 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 의 예를 들어라.
   (나) 각 유리수점에서는 연속이고 각 무리수점에서는 불연속인 함수 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ 는 존재하지 않음을 보여라.

6. 아무 거나 써라.