# 해석개론 1 시험

2019 년 11 월 7 일

1. 옹골집합에 관한 다음 물음에 답하여라.
   (가) 옹골집합의 정의를 써라.
   (나) 고른 연속의 정의를 써라.
   (다) 위 정의에 입각하여, 옹골집합에서 정의된 연속함수는 고른연속임을 증명하여라.

2. 연결집합에 관한 다음 물음에 답하여라.
   (가) 연결집합의 정의를 써라.
   (나) 위 정의에 입각하여, 실직선 $(-\infty, +\infty)$이 연결집합임을 증명하여라.

3. 양수열 $\langle a_n \rangle$ 에 대하여 함수 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$를 다음

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \max\{(1-(x-n)^2, 0\}), \qquad x \in [0, \infty)$$

   과 같이 정의하자. 이 함수가 고른연속이 될 수열 $\langle a_n \rangle$의 필요충분조건을 구하고, 그 이유를 써라.

4. 구간 $(0, 1)$ 안에 있는 유리수 전체를 $\{r_1, r_2, \dots\}$와 같이 늘어놓고, 함수 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$을 다음

$$f(x) = \sum_{r_n < x} \frac{1}{n^2}, \qquad x \in (0, 1)$$

   과 같이 정의하자.
   (가) 함수 $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$이 단조증가함수임을 보여라.
   (나) 함수 $f$가 유리수점에서 불연속임을 보여라.
   (다) 함수 $f$가 무리수점에서 연속인지 살펴보아라.

5. 각 실수 $\alpha$에 대하여, 함수 $f_\alpha : (-1, 1) \to \mathbb{R}$이 다음과 같이 정의되어 있다.

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

   함수 $f_\alpha$가 다음 성질을 가지게 되는 $\alpha$들을 모두 찾고 그 이유를 "간략"하게 설명하여라.
   (가) $f_\alpha$가 연속이다.
   (나) $f_\alpha$가 고른연속이다.
   (다) $f_\alpha$의 그래프가 연결집합이다.
   (라) $K \subset (-1, 1)$이 옹골집합이면 $f_\alpha(K)$도 옹골집합이다.
   (마) $C \subset (-1, 1)$이 연결집합이면 $f_\alpha(C)$도 연결집합이다.
   (바) $f_\alpha$가 미분가능하다.
   (사) $f_\alpha$가 미분가능하고, 그 도함수가 유계이다.
   (아) $f_\alpha$가 미분가능하고, 그 도함수가 연속이다.
   (자) $f_\alpha$가 두번 미분가능하다.

6. 아무 거나 써라.