

해석개론 1 시험

2019 년 12 월 10 일

- 원점에서 해석적인 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
 - 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $x_n > 0$ 및 $f(x_n) = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 인 수열 $\langle x_n \rangle$ 이 존재하면 $f'(0) = 0$ 임을 보여라.
 - 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $x_n > 0$ 및 $f(x_n) = 0$ 이고 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 인 수열 $\langle x_n \rangle$ 이 존재하면 $f \equiv 0$ 임을 보여라.
 - 무한개의 점 x_n 에 대하여 $f(x_n) = 0$ 이지만 $f \equiv 0$ 이 아닌 해석함수의 예를 들어라.
- 함수 $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대한 다음 두 명제
 - (가) $F' = f$ 를 만족하는 미분가능함수 $F : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 이 존재한다,
 - (나) $I \subset (-1, 1)$ 이 구간이면 $f(I)$ 도 구간이다.를 생각하고, 다음 물음에 답하여라.
 - (가) $\implies$ (나)를 증명하여라.
 - (나)는 만족하지만 (가)를 만족하지 않는 함수의 예를 들어라.
- ‘미분과 적분은 서로 역산 관계이다’라는 문장의 의미를 명확하게 서술하고 이를 증명하여라.
- 미분가능한 함수 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
 - 도함수 f' 이 유계이면 f 는 유계변동함수임을 보여라.
 - 도함수 f' 이 유계이고 리만적분가능한 경우, f 의 전변동이 항상 적분값 $\int_a^b |f'|$ 으로 주어지는지 살펴보아라.
 - f 가 유계변동함수이면 그 도함수 f' 은 항상 유계인가 살펴보아라.
- 유계함수 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, 유계변동함수 $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 와 실수 $A \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.
 - 극한 $\lim_{P \nearrow} S_a^b(f, P, \alpha) = A$ 의 의미를 정확하게 써라.
 - 극한 $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} S_a^b(f, P, \alpha) = A$ 의 의미를 정확하게 써라.
 - 위 극한 중 하나가 성립하면 다른 극한도 성립하는지 각각 살펴보아라.
- 다음 적분값을 구하라.
 - (1) $\int_0^{1/2} \frac{x}{1-x} d\left[\frac{1}{1/x}\right]$
 - (2) $\int_{-\pi}^{\pi} d(|\sin x|)$
- 아무 거나 써라.