

해석개론 1 시험

2020년 3월 30일

- 답안지는 A4용지 (줄 없는 것) 백지 3장, 앞뒤로 6쪽을 사용합니다.
- 문제당 한 쪽을 사용하되, 각 쪽 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 첫 쪽 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 모든 문제의 답안에는 명시적인 예외가 없는 한 풀이 과정을 씁니다.

1번. (15점) 수열 $\langle a_n \rangle$ 이 다음과 같이 주어져 있을 때, 이 수열의 상극한과 하극한을 구하여라.

(1) $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

(2) $a_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k}$

(3) $\{a_n : n = 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$ 을 만족하는 수열 $\langle a_n \rangle$

2번. (10점) 다음 문장이 옳은지 그른지 판단하여라.

- (1) 단조증가수열 $\langle a_n \rangle$ 이 a 로 수렴하면 a 는 집합 $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ 의 최소상계이다.
- (2) 단조증가수열 $\langle a_n \rangle$ 이 a 로 수렴하면 a 는 집합 $\{a_n : n = 1, 2, \dots\}$ 의 극한점이다.

3번. (25점) 칸토르집합 $C = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ (교재 1.5절 보기 3 참조)의 정의에서 집합 I_n 을 구성하는 각 구간들의 양끝점들 전체의 집합을 E 라 정의하자. 즉, $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} \partial I_n$ 이다.

- (1) $E \subset C$ 임을 보여라.
- (2) 칸토르집합의 원소들을 0, 2를 이용하여 삼진법으로 표현하였을 때, E 의 원소들은 어떤 것들인지 설명하여라.
- (3) 집합 $C \setminus E$ 에 들어가는 유리수의 예를 들어라.
- (4) 집합 $C \setminus E$ 에 들어가는 무리수의 예를 들어라.
- (5) 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $x_n \in (C \setminus E) \cap \mathbb{Q}$ 이면서 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ 인 수열 $\langle x_n \rangle$ 의 예를 들어라.

4번. (15점) 실수체 \mathbb{R} 이 만족하는 다음 두 성질

- 임의의 양수 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 $\frac{1}{n} < \varepsilon$ 인 자연수 $n \in \mathbb{N}$ 이 존재한다,
- 유계 무한집합 $A \subset \mathbb{R}$ 은 극한점을 가진다

을 이용하여 완비성공리를 증명하여라.

5번. (15점) 다음 평면집합 A 에 대하여 $\text{int } A$, \bar{A} , ∂A 를 구하여라. (답만 쓴다.)

(1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

(2) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in C\}$, 단 C 는 칸토르집합

(3) $A = A_0 \times \mathbb{Q}$, 단, $A_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} (2^{-n-1}, 2^{-n})$

6번. (21점) 다음 문장이 옳은지 그른지 판단하여라.

- (1) $a_n > 0$ 이고 $\lim_n a_n = 0$ 이면 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 이 수렴하거나 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 이 수렴한다.
- (2) $A \cap B = \emptyset$ 이면 $\text{int } A \cap \text{int } B = \emptyset$ 이고 $\bar{A} \cap \bar{B} = \emptyset$ 이다.
- (3) A 가 유계집합이면 $\text{int } A$ 와 \bar{A} 도 유계집합이다.