해석개론 1 시험

2020년 5월 4일

- 답안지는 파일 한 개로 작성하여 파일의 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 답안 파일 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 모든 문제의 답안에는 명시적인 예외가 없는 한 풀이 과정을 씁니다. 교재에 있는 내용을 사용하는 경우, 어떤 것인지 명확하게 인용합니다.

1번. (30점) 집합 $X \subset \mathbb{R}^n$에 대한 다음 두 가지 성질을 생각하자.

(1) 집합 X의 모든 열린덮개는 유한 부분덮개를 가진다.

(2) 집합 X의 모든 무한 부분집합은 극한점을 가진다.

정리 2.5.4를 증명하는 과정에서 완비성공리 또는 그것과 동치인 명제가 어떻게 사용되었는지 살펴보아라. 완비성공리가 없는 경우 (1) $\Longrightarrow$ (2) 및 (2) $\Longrightarrow$ (1) 이 성립하는가? 성립하는 경우, 이를 (1)과 (2)에서 언급한 성질들로부터 직접 증명할 수 있는가?

2번. (15점) 교재 3.1절부터 4.2절까지 나오는 도움정리, 정리, 명제, 따름정리들 가운데 완비성공리가 사용되는 것들을 모두 열거하여라. 이런 명제들의 공통점을 찾아보아라.

3번. (20점) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 대하여 $G_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$라 두고 다음 명제들이 옳은지 밝혀라.

(가) f가 연속이다 $\Longleftrightarrow$ G_f가 닫힌집합이다.

(나) f가 연속이다 $\Longleftrightarrow$ G_f가 연결집합이다.

(다) f가 연속이다 $\Longleftrightarrow$ I가 구간이면 $f(I)$도 구간이다.

(라) f가 연속이다 $\Longleftrightarrow$ K가 옹골집합이면 $f(K)$도 옹골집합이다.

4번. (20점) 집합 $X \subset \mathbb{R}^n$가 다음 성질을 만족한다고 하자.

- 임의의 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $a_n \in X$이면, 수열 $\langle a_n \rangle$은 X 안에서 수렴하는 부분수열을 가진다.

이 성질을 직접 이용하여 다음을 증명하여라.

(가) X에서 정의된 연속함수 $f : X \to \mathbb{R}$은 유계함수이다.

(나) X에서 정의된 연속함수 $f : X \to \mathbb{R}$은 최대값을 가진다.

(다) X에서 정의된 연속함수 $f : X \to \mathbb{R}$은 고른연속이다.

5번. (15점) 다음 성질을 만족하는 연속함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$의 예를 들어라.

- 임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $0 \le f(x) \le 1$이다.
- f는 고른연속이 아니다.

이런 성질을 만족하는 미분가능함수의 예를 들 수 있는가? 이런 성질을 만족하는 C^∞ 함수의 예를 들 수 있는가?