

해석개론 1 시험

2020년 6월 8일

- 가급적 문제당 한 쪽을 사용합니다. 각 문항의 시작은 새로운 쪽에서 시작합니다. 각 쪽 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 첫 쪽 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 모든 문제의 답안에는 명시적인 예외가 없는 한 풀이 과정을 씁니다. 교재에 나오는 명제나 연습문제를 사용하는 경우 명확하게 명시합니다.

1번. (10점) 감소 양수열 $\langle a_n \rangle$ 이 0으로 수렴한다 하자. 해석함수 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 이 각 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $f(a_n) = 0$ 을 만족하면, 함수 f 는 상수함수임을 보여라.

2번. (20점) 각 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $X(t) = (x(t), y(t))$ 로 주어진 함수 $X: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ 의 치역 $C_X = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 : t \in \mathbb{R}\}$ 을 생각하자.

- (1) $C_X = \{(x, y) : y = |x|\}$ 인 미분가능함수 x, y 를 찾을 수 있는가?
- (2) $C_X = \{(x, y) : y = |x|\}$ 인 C^∞ -함수 x, y 를 찾을 수 있는가?
- (3) $C_X = \{(x, y) : y = |x|\}$ 인 해석함수 x, y 를 찾을 수 있는가?

3번. (20점)

- (1) 구간 $[a, b]$ 가 옹골집합이라는 것, 옹골집합의 정의 및 연속함수의 정의를 이용하여, 임의의 연속함수 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 이 리만적분가능함을 보여라.
- (2) 유계함수 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 의 불연속점 전체의 집합 D 가 다음 조건을 만족한다고 하자: 임의의 $\varepsilon > 0$ 에 대하여 열린 구간열 $\langle (a_n, b_n) : n = 1, 2, \dots \rangle$ 이 존재하여

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_n, b_n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - a_n) < \varepsilon$$

을 만족한다. 이 때, 함수 f 가 리만적분가능함을 보여라.

- (3) 유계함수 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 의 불연속점 전체의 집합이 셀수있는 집합이면 리만적분가능함을 보여라.
- (4) 위 (2)의 결과를 이용하여 교재 123쪽 보기 4에 나오는 함수가 리만 적분가능함을 보여라.

4번. (20점) 리만적분가능한 함수 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 에 대하여 $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 을 다음

$$F(x) = \int_a^x f, \quad x \in [a, b]$$

과 같이 정의하자. 다음 명제들이 옳은지 살펴보아라.

- (1) F 가 $x = x_0$ 에서 미분가능하면 f 는 $x = x_0$ 에서 연속이다.
- (2) F 가 $x = x_0$ 에서 미분가능하면, f 의 좌극한 $f(x_0-)$ 과 우극한 $f(x_0+)$ 이 존재한다.
- (3) F 가 $x = x_0$ 에서 미분가능하고 $x = x_0$ 에서 f 의 좌극한과 우극한이 존재하면, $f(x_0-) = f(x_0+)$ 이다.

5번. (15점) 함수 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 이 유계변동이라 하자.

- (1) 함수 $\frac{1}{f}$ 가 유계변동이면, $|f| \geq \varepsilon$ 인 양수 $\varepsilon > 0$ 이 존재함을 보여라.
- (2) 위 (1)의 역이 성립하는지 살펴보아라.

6번. (15점) 함수 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 이 임의의 단조증가함수 α 에 대하여 리만-스틴체스 적분가능하다고 하자. 이 때 f 는 연속인가?