집합과 수리논리 1차 시험

2020년 4월 20일

- 답안지는 A4용지 (줄 없는 것) 4쪽을 사용합니다.
- 문제당 한 쪽을 사용하되, 각 쪽 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 첫 쪽 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 답안지에 서술하는 주장에는 그에 상응하는 논증이 있어야 합니다.

1번. (30점)

(1) 집합 A, B는 각각 집합 X, Y의 부분집합이라 하자. 다음 문장 "임의의 $x \in X$에 대하여 $(x, y) \in X \times B \longrightarrow x \in A$를 만족하는 $y \in Y$가 존재한다"의 부정을 써라:

(2) 임의의 집합 X, Y, Z에 대하여, 두 집합 $(Z^X)^Y$와 $(Z^Y)^X$을 각각 정의역과 공역으로 하는 전단사함수가 존재하는가?

(3) 임의의 집합족 $\{Y_i : i \in I\}$와 집합 X에 대하여, 두 집합 $\left(\prod_{i \in I} Y_i\right)^X$ 와 $\prod_{i \in I} Y_i^X$을 각각 정의역과 공역으로 하는 전단사함수가 존재하는가?

2번. (20점) 집합 X에 정의된 동치관계 $\sim$가 주어져 있다. 집합 X에 관계 R이 정의되어 있을 때, 다음

$$([x], [y]) \in \tilde{R} \;\longleftrightarrow\; (x, y) \in R$$

과 같이 $X/\sim$에 관계 $\tilde{R}$을 정의하여 $\tilde{R}$이 $X/\sim$의 순서관계가 되도록 하려면, R이 어떤 조건을 충족하여야 하는가?

3번. (30점)

(1) 집합 X에 대하여 두 성질 $X \subset Y$과 $X \in Y$를 만족하는 집합의 예를 들어라. 이 예가 '최소'의 예인지 살펴보아라.

(2) 순서집합 $\mathbb{N}$에서 순서집합 $\mathbb{Z}$를 각각 정의역과 공역으로 하는 함수들 가운데, 성질 $m \leq n \iff f(m) \leq f(n)$을 만족하는 전단사함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$가 존재하는가?

(3) 위 문제에서 $(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$를 $(\mathbb{Z}, \mathbb{Q})$로 바꾸고, '전단사'를 '전사'로 바꾸면 어떻게 되는가?

4번. (20점) 실수 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$가 유리수라 가정하면 $e = \dfrac{p}{q}$인 자연수 $p, q \in \mathbb{N}$을 잡을 수 있다. 이 때, $s_q = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}$라 두면

$$0 < e - s_q < \frac{1}{(q+1)!}\left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{q(q!)}$$

이고, 양변에 $q!$을 곱하여 $0 < e(q!) - s_q(q!) < \frac{1}{q}$를 얻는다. 그런데, $e(q!) = p(q-1)!$와 $s_q(q!)$ 모두 자연수이므로 모순이다.

(i) 실수 e를 나타내는 데데킨트 절단 α를 정의하여라.

(ii) $\alpha = r^*$를 만족하는 $r \in \mathbb{Q}$가 존재하지 않음을 증명하여라.