# 집합과 수리논리 기말시험

2020년 6월 8일

- 제 1부(1번 ∼ 3번)과 제 2부(4번 ∼ 6번)의 답안은 별도 파일로 반들어서 별도의 제출함에 제출합니다. 각 쪽 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 첫 쪽 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 답안지에 서술하는 주장에는 그에 상응하는 논증이 있어야 합니다. 교재에 나오는 명제나 문제를 사용하는 경우 명확하게 인용하시기 바랍니다.

==== 제 1부 =====

1번. (20점) 실수 $e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$가 유리수라 가정하면 $e = \dfrac{p}{q}$인 자연수 $p, q \in \mathbb{N}$을 잡을 수 있다. 이 때, $s_q = \sum_{n=0}^{q} \frac{1}{n!}$라 두면

$$0 < e - s_q < \frac{1}{(q+1)!}\left(1 + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots\right) = \frac{1}{q(q!)}$$

이고, 양변에 $q!$을 곱하여 $0 < e(q!) - s_q(q!) < \frac{1}{q}$를 얻는다. 그런데, $e(q!) = p(q-1)!$와 $s_q(q!)$ 모두 자연수이므로 모순이다.

(i) 실수 $e$를 나타내는 기본열 $\alpha$를 정의하여라.

(ii) $[\alpha] = [r^*]$를 만족하는 $r \in \mathbb{Q}$가 존재하지 않음을 증명하여라.

2번. (15점) 정리 3.3.2와 정리 2.1.1(라)의 차이점이 무엇인가 설명하여라. 정리 2.1.1(라)가 성립하지 않는 정렬집합의 예를 들어라.

3번. (15점) 서수 $\alpha$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(가) $1 + \alpha = \alpha$이면 $\alpha$가 무한서수임을 보여라.

(나) 위 (가)의 역이 성립하는지 살펴보아라.

==== 제 2부 =====

4번. (10점) 집합 $X$에 대하여 다음 성질을 만족하는 함수 $f : \mathcal{A} \to X$ 전체의 집합을 $\mathbb{F}$라 두자.

$$\mathcal{A} \subset 2^X, \qquad A \in \mathcal{A} \Longrightarrow f(A) \in A.$$

또한, $f : \mathcal{A} \to X$가 $g : \mathcal{B} \to X$의 제한일 때, $f \le g$보다 작다고 정의하자.

(가) 집합 $\mathbb{F}$가 순서집합임을 보여라.

(나) 소른도움정리로부터 선택공리를 직접 증명하여라.

5번. (20점) 순서집합 $X$의 극대사슬 전체의 집합을 $M_X$라 두자. 또한, 집합 $X$의 유한부분집합 전체의 순서집합을 $F[X]$라 두자.

(가) 순서집합 $\omega$의 극대사슬은 하나뿐임을 보여라.

(나) 순서집합 $F[\omega]$의 극대사슬이 어떤 것들인지 설명하여라.

(다) 집합 $F[\omega]$의 기수를 구하여라.

(라) 집합 $M_{F[\omega]}$의 기수를 구하여라.

6번. (20점) 서수의 지수와 관련된 다음 물음에 답하여라.

(가) 등식 $\alpha^{\beta+\gamma} = \alpha^\beta \alpha^\gamma$이 성립함을 증명하여라.

(나) 등식 $\alpha^{\beta\gamma} = (\alpha^\beta)^\gamma$이 성립함을 증명하여라.

(다) 서수들의 순서쌍 $(\alpha, \beta) = (2, \omega), (\omega, 2), (\omega, \omega)$에 대하여 두 서수 $(\alpha\beta)^\omega$와 $\alpha^\omega\beta^\omega$ 사이의 대소 관계를 살펴보아라. 또한, 등호가 성립하는지 살펴보아라.