해석개론 2 시험

2020년 10월 5일

- 가급적 문제당 한 쪽을 사용합니다. 각 문항의 시작은 새로운 쪽에서 시작합니다. 각 쪽 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 첫 쪽 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 모든 문제의 답안에는 명시적인 예외가 없는 한 풀이 과정을 씁니다. 교재에 나오는 명제나 연습문제를 사용하는 경우 명확하게 명시합니다.

1번. (20점) 고른 수렴에 대한 다음 물음에 답하여라.

(가) 교재 150쪽 "고르게 수렴한다"는 정의의 부정을 써라. 함수항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$이 구간 $(-1,1)$ 위에서 고르게 수렴하지 않는 이유를 이에 입각하여 설명하여라.

(나) 정리 6.1.2 (나)의 부정을 써라. 함수항급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\sin nx$이 구간 $[-\pi,\pi]$ 위에서 고르게 수렴하지 않는 이유를 이에 입각하여 설명하여라.

2번. (15점) 구간 $[0,1]$ 위에서 정의된 연속함수열 $\langle f_n \rangle$이 영함수로 단조감소하면서 수렴할 때, 등식

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n = 0$$

임을 보여라. 여기서 단조감소라 함은 $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$라는 의미이다. 여기에서 단조감소라는 조건이 누락되면 어떻게 되는지 살펴보아라.

3번. (15점) 다음 두 부등식 중 하나를 선택하여 문제 6.3.1을 풀어라.

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| + |f(x_n) - f(x)|$$

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|$$

본인이 선택한 것 이외의 부등식을 사용하여 해결할 수 있는지 살펴보아라. 고른수렴이 아니고 점별수렴인 경우에도 같은 결론을 낼 수 있는지 살펴보아라.

4번. (15점) 거듭제곱급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} x^n$에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(가) 이 급수의 수렴 반경을 구하여라.

(나) 이 급수가 수렴하는 구간을 구하여라.

(다) 이 급수가 수렴구간 안에서 고르게 수렴하는지 살펴보아라. 그렇지 않은 경우, 이 급수가 고르게 수렴하는 구간을 가능한 한 크게 제시하여라.

5번. (15점) 정리 7.1.4를 증명하는 과정에서 함수열 $\langle Q_n \rangle$이 중요한 역할을 하였다.

(가) 증명 과정에서 사용되는 함수열 $\langle Q_n \rangle$의 성질들을 열거하여라.

(나) 위에 제시한 각각의 성질들이 증명과정에서 어떻게 사용되었는지 설명하여라.

(다) 교재에서 사용한 $\langle Q_n \rangle$ 외에 다른 함수열을 이용하여 정리 7.1.4를 사용할 수 있는지 살펴보아라.

6번. (20점) 수열 $\langle a_n \rangle$에 대하여 다음과 같이 $\ell^2(\mathbb{N})$의 부분집합을 정의하자. 이 집합이 옹골집합이 되도록 하는 수열 $\langle a_n \rangle$의 조건을 찾아라.

(가) $A = \{a_n e_n : n = 1, 2, \dots\}$

(나) $B = \{0\} \cup \{a_n e_n : n = 1, 2, \dots\}$

(다) $C = \{\sum_{k=1}^{n} a_k e_k : n = 1, 2, \dots\}$의 닫힘

(라) 이 문제에서 $\ell^2(\mathbb{N})$을 $\ell^1(\mathbb{N})$으로 바꾸면 어떻게 되는가?