해석개론 2 시험

2020년 11월 4일

- 가급적 문제당 한 쪽을 사용합니다. 각 문항의 시작은 새로운 쪽에서 시작합니다. 각 쪽 첫 줄에 문제번호, 소속, 학번, 이름을 씁니다.
- 첫 쪽 둘째 줄에 "이 답안지는 다른 이의 도움없이 본인 스스로 작성하였습니다." 라고 쓰고 사인합니다.
- 모든 문제의 답안에는 명시적인 예외가 없는 한 풀이 과정을 씁니다. 교재에 나오는 명제나 연습문제를 사용하는 경우 명확하게 명시합니다.

1번. (20점) 함수공간 $\mathcal{R}^1[0,1]$의 함수열 $\langle f_n \rangle$에 대한 다음 주장들이 옳은지 그른지 살펴보아라.

(가) 임의의 $x \in [0,1]$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$이면 $\|f_n\|_1 \to 0$이다.

(나) $\|f_n\|_1 \to 0$이면, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$인 $x \in [0,1]$가 존재한다.

(다) $\|f_n\|_1 \to 0$이면 $\|f_n\|_2 \to 0$이다.

(라) $\|f_n\|_2 \to 0$이면 $\|f_n\|_1 \to 0$이다.

2번. (20점) 교재 244쪽 (23)의 정의에서 적분과 미분의 순서를 바꿀 수 있다면 $(f * g)'(x) = (f' * g)(x)$가 성립하게 된다.

(가) 두 함수 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$에 어떤 가정을 부여하면, 정리 8.1.3를 적용하여 실제 이 공식이 성립하게 되는지 살펴보아라.

(나) 각 $p > -1$에 대하여 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$을 다음과 같이 정의하자.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^p, & x > 0 \end{cases}$$

두 함수 f와 $\varphi = f * (\frac{1}{2}\chi_{[-1,1]})$의 미분 가능성($C^n$-함수인가 여부)을 비교 설명하여라.

3번. (15점) 임의의 고정된 $y > 0$에 대하여 함수 $x \mapsto \log B(x,y)$가 볼록임을 증명하여라. 단, $B(x,y)$는 베타함수.

4번. (20점) 벡터공간 $\mathbb{R}^2$와 부분공간 $L = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 0\}$에 대한 다음 물음에 답하라.

(가) 임의의 $x \in \mathbb{R}^2$에 대하여 $\|x - y_0\| = \min\{\|x - y\| : y \in L\}$을 만족하는 $y_0 \in L$이 유일하게 존재함을 설명하여라.

(나) 위에서 $\|\cdot\|$를 $\|\cdot\|_1$로 바꾸면 어떻게 되는지 살펴보아라. (교재 38쪽 문제 2.1.4 참조)

(다) 위에서 $\|\cdot\|$를 $\|\cdot\|_\infty$로 바꾸면 어떻게 되는지 살펴보아라. (교재 38쪽 문제 2.1.4 참조)

5번. (25점)

(가) 구간 $[0, 2\pi]$ 위에서 함수 $f(x) = e^x$의 푸리에급수를 구하여라.

(나) 이 푸리에 급수에 파시발 등식을 적용하여 어떤 급수의 값을 구할 수 있는지 살펴보아라.

(다) 양수 $p > 0$에 대하여 무한급수 $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{p^2 + n^2}$의 값을 구하여라.

(라) 실수 $p \in \mathbb{R}$에 대하여 $\sigma(p) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^2 + n^2}$이라 정의하자. 함수 σ가 $p = 0$에서 연속인지 살펴보아라.