해석개론 2 시험

2020년 12월 2일

- 소지하고 있는 책이나 공책을 참조할 수 있습니다. 전자기기의 사용은 금지합니다.

1번. (15점) 다음과 같은 성질을 만족하면서 주기가 2π인 함수족 $\{f_\alpha : \alpha \in (0,1)\}$의 예를 들어라.

- 각 f_α는 C^∞함수이다.
- 각 f_α는 해석함수가 아니다.
- $\alpha \neq \beta$이면 $f_\alpha \neq f_\beta$이다.

2번. (15점) 구간 $[0,1]$ 안에 들어 있는 유리수 전체의 집합 E에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(가) 집합 E의 측도가 0임을 정의에 입각하여 증명하여라.

(나) 집합 E가 잴수있음을 정의에 입각하여 증명하여라.

(다) 유한 개의 열린구간 $\{I_1, I_2, \dots, \}$이 $\bigcup_{i=1}^n I_i \supset E$를 만족하면 $\sum_{i=1}^n \lambda(I_i) \geq 1$임을 보여라.

3번. (15점) 잴수 있는 집합 E에서 정의된 잴수있는 두 함수 f, g가 주어져 있을 때, 거의 모든 점 $x \in E$에 대하여 $f(x) = g(x)$가 성립하면 $f \sim g$라 정의하자. 또한, 잴수있는 함수 f에 대하여, $f \sim g$인 모든 잴수 있는 함수 g들의 집합을 $[f]$라 정의하자.

(가) $f \sim g$이고 $g \sim h$이면 $f \sim h$가 성립함을 보여라.

(나) 두 잴수있는 함수 f, g에 대하여 $[f] = [g]$ 또는 $[f] \cap [g] = \emptyset$이 성립함을 보여라.

(다) $[f] = [g]$이고 $[h] = [k]$이면 $[f+h] = [g+k]$임을 보여라.

4번. (20점) 교재 293쪽 보기 4와 같이 정의된 측도 $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), c)$와 함수 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$에 대하여 르벡적분의 정의를 적용하려고 한다.

(가) 임의의 함수 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ 이 잴수있는 함수임을 설명하여라.

(나) 10.2절 르벡적분의 정의를 따라갔을 때 적분값 $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} a$ 이 어떻게 정의되는지 설명하고, 이 적분값이 어느 경우에 무한급수의 합과 같아지는지 살펴보아라.

(다) 이 경우, 단조수렴정리, 파투정리, 르벡수렴정리, 레비정리가 각각 무엇을 말해 주는지 설명하여라.

(라) 적분값 $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} a$ 과 무한급수의 합이 일치하지 않는 경우가 있는지 살펴보아라.

5번. (15점) 잴수있는 집합 E에서 정의된 함수 f로 점별수렴하는 잴수있는 함수열 $\langle f_n \rangle$이 다음 성질을 만족할 때, 등식 $\displaystyle\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$이 성립하는지 각각 살펴보아라.

(가) 임의의 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $f_n \geq f_{n+1} \geq 0$이다.

(나) 임의의 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $0 \geq f_n \geq f_{n+1}$이다.

(다) 임의의 $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여 $0 \leq f_n \leq f$이다.

6번. (20점) 수열 $a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$에 대하여 $\displaystyle s_n = \sum_{k=-n}^{n} a(k) u_k$이라 두고, 함수열 $\langle s_n \rangle$이 $L^1[-\pi, \pi]$ 안에서 코시수열이 되는 수열 a 전체의 집합을 X라 두자.

(가) $\ell^2(\mathbb{Z}) \subset X$임을 보여라.

(나) 만일 $a \in X$이면 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \|f - s_n\|_1 = 0$이 되는 $f \in L^1[-\pi, \pi]$가 유일하게 존재하고, $\widehat{f} = a$임을 보여라.

(다) 만일 $a \in X$이고, $\lim_n \sum_{k=-n}^n a(k) u_k = 0$이면 $a = 0$임을 보여라.