집합과 수리논리 1차 시험

2021년 4월 19일 18:00 ~ 20:00

1번. (15점) 집합족 $\{X_i : i \in I\}$에 대하여 $\prod_{i\in I} X_i$의 정의를 써라. 두 집합 X_0와 X_1에 대하여 $X_0 \times X_1$과 $\prod_{i\in\{0,1\}} X_i$는 본질적으로 "같은" 것임을 설명하여라.

2번. (15점) 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$에서 다음 집합으로 가는 전단사함수가 존재하는지 밝혀라.

(가) $\mathbb{N}$의 부분집합 전체의 집합

(나) $\mathbb{N}$의 유한부분집합 전체의 집합

(다) $\mathbb{N}$의 무한부분집합 전체의 집합

3번. (10점) 다음 집합 X에 정의된 관계 $\sim$이 동치관계임을 확인하고, 몫집합 $X/\sim$이 무엇인지 설명하여라.

(가) $X =$ 평면 위의 있는 직선들의 집합, $L_1 \sim L_2 \iff L_1$과 L_2가 평행이다.

(나) $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $(x,y) \sim (z,w) \iff (x,y) = a(z,w)$ for some $a \in \mathbb{R}$

4번. (10점) 순서집합 $(X, \geq)$의 부분집합 A에 관한 다음 두 명제의 부정을 각각 써라.

(가) 만일 $x \geq y$이고 $y \in A$이면, $x \in A$이다,

(나) 임의의 $x \in A$에 대하여, $y > x$인 $y \in A$가 존재한다.

5번. (15점) 자연수집합 $\mathbb{N}$에 대한 다음 물음에 답하여라.

(가) 자연수 전체의 집합 $\mathbb{N}$의 정의를 써라.

(나) 위 정의를 이용하여 $n \in \mathbb{N}$이고 $x \in n$이면 $x \subset n$임을 보여라.

(다) 다음 집합들이 $\mathbb{N}$의 원소인가 아닌가 밝히고, 그 이유를 써라.

$$\emptyset, \qquad \{\emptyset\}, \qquad \{\{\emptyset\}\}, \qquad \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \qquad \{\{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\} \qquad \{\emptyset, \{\{\emptyset\}\}\}$$

6번. (15점) 자연수로부터 정수를 구성하는 방법을 설명하여라.

7번. (30점) 부분합 수열이 위로 유계이고 각 항이 유리수 $a_n \geq 0$으로 주어진 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에 대하여, 이 급수의 값을 데데켄트 절단으로 정의하고, 실제 데데킨트절단이 되는지 확인하여라. 다음 무한급수의 값을 위와 같이 데데킨트절단으로 정의하였을 때, 이 이실수들이 유리수인지 무리수인지 각각 밝혀라.

(가) $\dfrac{1}{2^0} + \dfrac{1}{2^1} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \cdots$ (나) $\dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} + \cdots$

8번. 아무 거나 써라.