

복소변수함수론 시험

2021 년 10 월 20 일 18:00~20:00

문제 1 (5+5점)

(가) 방정식 $z^7 = 1$ 의 서로 다른 7개의 근을 각각 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_7$ 라 할 때,

$$(2 - \alpha_1)(2 - \alpha_2) \cdots (2 - \alpha_7)$$

의 값을 구하여라.

(나) 반지름이 1인 원에 내접하는 정칠각형 $A_1A_2 \cdots A_7$ 에 대하여 길이의 곱

$$\overline{A_1A_2} \times \overline{A_1A_3} \times \cdots \times \overline{A_1A_7}$$

의 값을 구하여라.

문제 2 (8+7점)

(가) 열린단위원판 $\{z : |z| < 1\}$ 을 자기자신으로 보내고, $z = \frac{i}{2}$ 를 $w = 0$ 으로 보내는 일차분수함수를 하나 찾으라.

(나) 열린단위원판 $\{z : |z| < 1\}$ 을 반평면 $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$ 으로 보내고, $z = 0$ 을 $w = 1$ 로 보내는 일차분수함수를 하나 찾으라.

문제 3 (7+7+6점)

(가) 정의역이 $\mathbb{C} \setminus \{x + iy : x \leq 0, y = 0\}$ 이고, 정의역 위의 각 z 에 대하여 등식 $f(z)^2 = z$ 및 $f(1) = 1$ 를 만족하는 해석함수 f 의 예를 들라.

(나) 위에서 구한 함수 f 에 대해 $z = 1$ 에서의 거듭제곱급수 전개를 구하여라.

(다) 이 급수의 수렴반경 R 을 구하고, $|z - 1| = R$ 인 점 z 들 중 어느 점들에서 급수가 수렴하고 어느 점들에서 급수가 발산할지 추측하라. 이와 같이 추측한 이유를 간단히 쓰라.

문제 4 (5+5+5+5점)

(가) 조화함수의 정의를 쓰라.

(나) 이차동차식 $u(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ 으로 주어진 실함수들 가운데 조화함수를 모두 찾으라.

(다) 위에서 찾은 함수들은 어떤 해석함수의 실수부가 되는가?

(라) 삼차동차식 $u(x, y) = ax^2 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$ 에 대하여 어떤 얘기를 할 수 있는가?

문제 5 (15점) “멱급수로 정의된 함수는 해석함수”라는 명제를 명확하게 서술하고 증명하라.

문제 6 (10+10점)

(가) 열린원판 위에서 정의된 미분가능한 함수에 대하여 원시함수를 구성하고, 실제로 원시함수가 된다는 것을 보이라.

(나) 열린단위원판 $\{z : |z| < 1\}$ 위에서 정의된 함수 $f(z) = \frac{1}{z-1}$ 에 대하여 위 방법을 적용하면 어떤 원시함수가 나오는가?

문제 7 아무 거나 쓰라.