복소변수함수론 시험

2021 년 12 월 8 일 18:00~20:00

문제 1 (15) 영역 Ω 에서 정의된 복소함수 $f : \Omega \to \mathbb{C}$ 에 대한 명제 "함수 f 가 임의의 $z_0 \in \Omega$ 에서 미분가능하다" 에 대하여 다음 물음에 답하여라

(가) 위 명제와 동치인 명제를 아는대로 써라.

(나) 영역 Ω 가 단순연결영역인 경우 추가로 동치인 명제를 아는대로 써라.

문제 2 (25) 다음 적분값을 구하여라.

(가) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{1-z^2}\,dz$

(나) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z}{1+z^2}\,dz$

(다) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^7}{1-z^7}\,dz$

(라) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2+1}{z(z-1)}\,dz$

(마) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{1}{z(e^z-1)}\,dz$

문제 3 (10) 방정식 $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$ 의 모든 근 α 는 부등식

$$|\alpha| \le \max\{1, |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\}$$

를 만족함을 보여라.

문제 4 (10) 수렴반경이 $R > 0$인 멱급수로 정의된 함수 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 가 주어져 있다. 또한, 실수열 $\langle r_n \rangle$이 $0 < r_{n+1} < r_n < R$ 이면서 0 으로 수렴한다고 하자. 이 때, 임의의 $n = 1, 2, \ldots$ 에 대하여 $f(r_n) = 0$을 만족하면 f 가 상수함수임을 보이되, 복소수를 사용하지 말고 증명하여라.

문제 5 (20) 각 자연수 $n = 2, 3, 4 \ldots$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

(가) 적분값 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^n}$의 값을 구하여라.

(나) 실변수 함수 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^n}$의 원시함수를 분수함수, 로그함수 및 역탄젠트함수들을 이용하여 구하는 방법을 설명하여라.

문제 6 (20)

(가) 단순연결영역 Ω 에서 정의된 조화함수 $u : \Omega \to \mathbb{R}$ 에 대하여 $\mathrm{Re}\, f = u$ 를 만족하는 해석함수 $\Omega \to \mathbb{C}$ 가 존재함을 보여라.

(나) 함수 $u(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ 이 조화함수임을 보이고, 영역 $\mathbb{C} \setminus \{z : \mathrm{Re}\, z \ge 0\}$ 위에서 $\mathrm{Re}\, f = u$ 를 만족하는 해석함수 f 를 구하여라.

문제 7 아무 거나 써라.