실변수함수론 시험

2023 년 4 월 26 일

1. 임의의 집합 $S \subset \mathbb{R}$에 대하여, 길이 $\mu(S)$의 정의를 써라. 이 정의에 입각하여 칸토르집합의 길이를 구하여라.

2. 잴수있는 함수 $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$에 대한 적분을 정의하여라. 함수 $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$의 적분값을 이 정의에 의하여 구하여라.

3. 각 $q > 0$에 대하여 다음 등식
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,dx = 1 - \frac{1}{1+q} + \frac{1}{1+2q} - \frac{1}{1+3q} + \cdots$$
이 성립함을 증명하여라. 증명 도중에 사용한 정리가 있으면 이를 명확하게 기술하고, 그 정리가 어떻게 적용되었는지 설명하여라.

4. 절대연속의 정의를 써라. 고른연속이지만 절대연속이 아닌 함수의 예를 들고, 그 이유를 설명하여라.

5. 자연수 집합 $\mathbb{N}$의 부분집합에 대하여 그 집합의 갯수로 측도를 정의하자. 또한, 함수 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$에 대하여, $a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$인 복소수 a를 무한합 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$라 정의하자.
   - (가) 적분값 $\int_{\mathbb{N}} f$와 무한합 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$이 공통적으로 정의되는 경우, 그 값이 같은지 살펴보아라.
   - (나) 적분값은 정의되지만 무한합이 정의되지 않는 경우, 그리고 무한합이 정의되지만 적분값이 정의되지 않는 경우의 예를 각각 들어라.

6.
   - (가) 고른연속함수 $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$이 적분가능하면 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$임을 증명하여라.
   - (나) 연속함수에 대하여, 위 명제가 성립하는지 살펴보아라.

7. $1 \le p < q \le \infty$ 에 대하여 $L^p[0,1]$ 과 $L^q[0,1]$ 사이의 포함관계에 대하여 논의하여라.

8. 좌표평면 $\mathbb{R}^2$의 부분집합으로서, $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$에는 들어가지 않지만, $\mathfrak{M}_2$에는 들어가는 집합의 예를 들어라.

9. 아무 거나 써라.