실변수함수론 시험

2023 년 6 월 7 일

1. (20점) 이변수함수 $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ 에 대하여 다음 물음에 답하여라.

   (가) $[1,\infty)\times[1,\infty)$ 위에서 두 가지 반복적분의 값을 구하여라.

   (나) 위 계산 결과를 토넬리 정리 및 푸비니 정리와 관련하여 설명하여라.

2. (20점) 함수모임 $\{h_\lambda : \lambda\in(0,\infty)\}$에 대하여 다음 성질을 생각하자.

   - $h_\lambda \ge 0$ 이다,
   - $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h_\lambda = 1$ 이다,
   - 임의의 양수 $\delta>0$ 에 대하여 $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} h_\lambda = 0$ 이다.

   이 때, 다음 물음에 답하여라.

   (가) 임의의 $f\in L^1(\mathbb{R})$ 에 대하여 $\lim_{\lambda\to\infty}\|f-h_\lambda * f\|_1=0$이 성립함을 보여라.

   (나) 임의의 $f\in L^\infty(\mathbb{R})$ 에 대하여 $\lim_{\lambda\to\infty}\|f-h_\lambda * f\|_\infty=0$이 성립하는지 살펴보아라.

   (다) 위 세 성질을 만족하는 함수족의 예를 들어라.

3. (20점) 함수 $f\in L^1(\mathbb{T})$에 대하여,

$$C_f(\xi)=f*\xi,\qquad \xi\in L^2(\mathbb{T})$$

   라 정의하자.

   (가) 각 $\xi\in L^2(\mathbb{T})$에 대하여 $C_f(\xi)\in L^2(\mathbb{T})$임을 보여라.

   (나) 선형사상 $C_f : L^2(\mathbb{T})\to L^2(\mathbb{T})$가 유계선형사상임을 보여라.

   (다) 함수 $f\in L^1(\mathbb{T})$의 푸리에계수를 이용하여 선형사상 C_f 의 노음을 구하여라.

4. (20점) 두 복소수열 x, y에 대하여 $\langle x,y\rangle=\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x(k)y(k)$ 이라 정의하자. 벡터공간 ℓ^1 의 수열 $\langle x_n\rangle$에 대하여 다음 세 명제

   (C1) 임의의 $y\in\ell^\infty$에 대하여 $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$이다,

   (C2) 임의의 $y\in c_0$에 대하여 $\langle x_n,y\rangle\to\langle x,y\rangle$이다.

   (C3) 임의의 $k\in\mathbb{N}$에 대하여 $x_n(k)\to x(k)$이다.

   를 생각하자.

   (가) 위 세 가지 명제에 대하여 (C1) $\Longrightarrow$ (C2) $\Longrightarrow$ (C3)가 성립함을 보여라.

   (나) (C2) $\Longrightarrow$ (C1)이 성립하는지 살펴보아라.

   (다) (C3) $\Longrightarrow$ (C2)이 성립하는지 살펴보아라.

5. (20점) 나란히꼴 등식에 대하여 다음 물음에 답하여라

   (가) 복소내적공간의 나란히꼴 등식을 쓰고 증명하여라.

   (나) 바나하공간의 두 벡터 x, y에 대하여

$$\langle x,y\rangle=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3}i^k\|x+i^k y\|^2$$

   이라 정의하자. 노음 $\|\ \|$이 나란히꼴 등식을 만족하면 $\langle x,y\rangle$은 내적이 되고, $\|x\|^2=\langle x,x\rangle$이 성립함을 증명하여라.

6. 아무 거나 써라