

## 해석개론 시험

1999년 4월 1일

1 (10) 완비성공리를 써라. 여기에 나오는 용어의 정의도 함께 써라.

2 (15) 수열의 극한의 정의를 써라. 이 정의를 이용하여, 실수열  $\langle x_n \rangle$  이  $\alpha$ 로 수렴하고  $\alpha \neq 0$  이면  $\left\langle \frac{1}{x_n} \right\rangle$  이  $\frac{1}{\alpha}$ 로 수렴함을 보여라.

3 (10) 구간  $(0, 1)$  안에 들어가는 수열  $\langle a_n \rangle$  이 0으로 수렴한다고 하자. 이 때,

$$\text{집합 } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a_n, 1] \text{ 과 } B = \bigcap_{n=1}^{\infty} (0, a_n) \text{ 을 구하고, 그 이유를 써라.}$$

4 (15) 임의의 자연수  $n = 1, 2, \dots$ 에 대하여

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

이 성립함을 보여라. 이를 이용하여 극한값

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - \log n \right)$$

이 존재함을 보여라.

5 (15) 다음 집합  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ 에 대하여  $\text{int } A$ 와  $A'$ 를 구하여라. (답만 써라.)

(가)  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$

(나)  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 = \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots\}$

(다)  $A = \{(n, n + \frac{1}{m}) : m, n = 1, 2, \dots\}$

(라)  $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(\frac{1}{n}, y) : 0 \leq y \leq 1\}$

6 (15) 좌표공간의 수열  $\langle x_n \rangle$ 이 고정된 실수  $r < 1$ 에 대하여 다음 조건

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| \leq r \|x_{n+1} - x_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

를 만족할 때,  $\langle x_n \rangle$ 이 코시수열임을 보여라. 위 조건을

$$\|x_{n+2} - x_{n+1}\| < \|x_{n+1} - x_n\|, \quad n = 1, 2, \dots$$

으로 바꾸어도 같은 결론을 내릴 수 있는가 답하고, 그 이유를 써라.

7 (10) 다음 수열  $\langle x_n \rangle$ 의 상극한과 하극한을 구하고, 그 이유를 써라.

(가)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cos \frac{n\pi}{2}$

(나)  $x_n = \sin \frac{n\pi}{3} \cos \frac{2n\pi}{3}$

8 (10) 자연로그의 밀수  $e$ 에 대하여 아는 바를 써라.