해석개론 시험

1999 년 5 월 12 일

1 (15)

(가) 옹골집합과 연결집합의 정의를 써라.

(나) 집합 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 가 옹골집합이면 $2K = \{2x : x \in K\}$ 도 옹골집합임을 보여라.

(다) 집합 $C \subseteq \mathbb{R}^n$ 이 연결집합이면 그 닫힘 $\overline{C}$ 도 연결집합임을 보여라.

2 (15) 함수 $f : X \to Y$ 에 대하여 다음이 동치임을 보여라.

(가) f 는 연속함수이다.

(나) 만일 V 가 Y 의 열린집합이면 $f^{-1}(V)$ 는 X 의 열린집합이다.

3 (10) 집합 $A \subset \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$f(x) = \inf\{\|x - a\| : a \in A\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

이라 정의하였을 때, 임의의 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 부등식

$$|f(x) - f(y)| \leq \|x - y\|$$

이 성립함을 보여라.

4 (15) 다음 함수가 주어진 정의역 위에서 고른연속함수인지 말하고 그 이유를 써라

(가) $f(x) = x^2, \qquad x \in [0, \infty)$

(나) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}, \qquad x \in (0, 1)$

(다) $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin x, \qquad x \in (0, \infty)$

5 (30) 다음 명제들이 참인지 거짓인지 말하고, 그 이유를 써라.

(가) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 에 대하여 집합 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$ 가 연결집합이면, f 는 연속함수이다.

(나) 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 가 미분가능하고 방정식 $f'(x) = 0$ 이 실근을 가지지 않으면, $f' > 0$ 이거나 $f' < 0$ 이다.

(다) 다음

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|} \sin \dfrac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

과 같이 정의된 함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 는 원시함수를 가진다.

6 (15)

(가) 해석함수의 정의를 써라.

(나) 지수합수 $f(x) = e^x$ 가 실직선 위에서 해석함수임을 보여라.

7 (20) 함수 $f, g : [0, \infty) \to (0, \infty)$ 가 연속함수라 가정하자.

(가) 만일 $0 \le x < y$ 이면

$$\int_0^x f(t)dt \int_0^y g(t)dt - \int_0^y f(t)dt \int_0^x g(t)dt$$
$$= \int_0^x f(t)dt \int_x^y g(t)dt - \int_0^x g(t)dt \int_x^y f(t)dt$$

임을 보여라.

(나) 만일 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 가 단조감소함수이면, $0 \le x < y$ 에 대하여 부등식

$$\int_0^x g(t)h(t)dt \int_x^y g(t)dt \ge \int_0^x g(t)dt \int_x^y g(t)h(t)dt$$

및

$$\int_0^x f(t)dt \int_0^y g(t)dt \ge \int_0^y f(t)dt \int_0^x g(t)dt$$

가 성립함을 보여라.

(다) 만일 $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ 가 단조감소함수이면 $H(x) = \dfrac{\int_0^x f(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}$ 역시 단조감소함수임을 보여라.