韓國數學敎育學會誌 시리즈 A <數學敎育>
2010. 05. 제 49권, 제 2호, 247-257.

J. Korean Soc. Math. Ed. Ser. A: The Mathematical Education
May. 2010, Vol. 49, No. 2, 247-257.

우리나라 고등학교 수학 교과서에서 함수의 증감과 극대 · 극소를 설명하는 방식에 대한 비판적 논의

계 승 혁 (서울대학교)
하 길 찬 (세종대학교)

I. 들어가는 글

고등학교에서 공부하는 수학에서 가장 중요한 단원 몇 개를 고르라고 하면 많은 사람들의 답변에는 미분과 적분이 포함될 것이다. 실제로 미분법의 발견은 도형이나 수와 같은 정적인 대상을 연구하던 고대 희랍 수학의 전통을 전혀 새로운 차원으로 이끌었으며, 근대 유럽의 발전을 가져온 원동력이기도 하다. 이와 같은 미분과 적분의 중요성과 사회적 요구가 반영되어 2007년 개정 교육과정에서는 대학에서 인문학이나 사회과학을 전공할 학생들까지도 다항함수의 미분과 적분을 배울 수 있도록 '미적분과 통계 기본'이란 영역을 도입하였다.

그런데, 대학에서 해석개론이나 고등미적분을 배우는 학생들은 몇몇 단계에서 고등학교에서 배운 내용과 대학에서 배우는 내용이 서로 다름으로 인하여 고민하기도 하는데, 그 대표적인 예가 '극대'와 '극소'이다. 또 극대, 극소의 개념은 함수의 증감과 밀접한 관련을 가질 뿐 아니라 많은 교과서가 함수의 증감을 이용하여 극대와 극소를 설명하고 있는데, 많은 학생들은 여기서도 심각한 오해를 하고 있다. 즉, 학생들은 '미분가능한 함수 $y=f(x)$가 정의역의 한 점 $x=a$에서 $f'(a)>0$을 만족하면 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에서 증가함수가 된다'는 것으로 오해하고 있다.

이와 관련된 선행 연구로서 제4차 교과서들에 대한 문제점을 분석한 박세희(1983)의 연구를 찾아볼 수 있다. 이 연구에서는 당시 교과서에서 극대 · 극소를 정의하는 방식의 문제점을 살펴보고, 특히 최대 · 최소와 연관하여 어떤 오류를 범하고 있는지 분석하고 있다.

한편, 심상길 · 최재길(2009)는 이공계열 대학 신입생을 대상으로 함수의 극값과 관련된 문제에서 오류를 범하는 원인을 조사한 결과, 대부분이 정리를 곡해하거나 극값의 정의를 정확하게 설명하지 못하는 데에서 기인한다는 것을 밝힌 바 있다.

이러한 문제점들이 어디서 기인하는지 파악하기 위하여 7차 고등학교 '수학II' 교과서 12종을 분석한 결과 몇 가지 문제점이 발견되었으며, 이러한 문제점은 2007년 개정 교과서에서도 개선되지 않고 반복되고 있다. 본 연구에서는 2007년 개정 교과서 '수학II' 11종과 '미적분과 통계 기본' 13종을 분석하여, 함수의 증감과 극대 · 극소를 다루는 방법에 있어서 이들 교과서의 문제점을 구체적으로 파악하고 개선 방안을 제시하려고 한다.1)

II. 교과서에서 함수의 증가·감소를 설명하는 방식의 문제점

미분법을 공부하는 가장 큰 목적 가운데 하나는 도함수를 구함으로써 함수의 증가, 감소를 파악하는 것이다. 모든 교과서에서 함수 $f(x)$가 어떤 구간의 임의의 두 수 x_1, x_2에 대하여

$$x_1 < x_2 \text{일 때, } f(x_1) < f(x_2)$$

를 만족하면 이 구간에서 증가함수라고 정의하고 있으며, 아래과 같이 열린 구간에서 도함수가 양이면 그 구

* 접수일(2010년 3월 18일), 수정일(2010년 4월 26일), 게재확정일(2010년 5월 7일)
* ZDM분류 : U24, I14, I44, B74, D34
* MSC2000분류 : 97U20, 97C90, 97D30, 97D70
* 주제어 : 도함수, 증가상태, 증가함수, 최대 · 최소의 정리, 평균값의 정리, 극댓값, 최댓값

1) 앞으로 특별한 언급을 하지 않고 교과서를 말할 때는 모두 2007년 개정 교육과정에 따른 교과서를 말한다.

간에서 증가함수라는 것을 설명하고 있다.

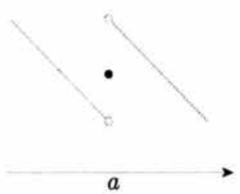
정리 1: 함수 $f(x)$가 열린 구간에서 미분가능하고 $f'(x) > 0$이면 그 구간에서 증가함수이다.

1. '증가상태', '감소상태'라는 개념에 관하여

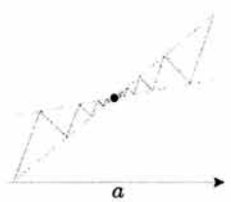
5종의 수학Ⅱ 교과서(계승혁 · 김홍종 · 하길찬 · 박복현 · 장성욱 · 박장순, 2009; 윤재한 외, 2009; 이준열 외, 2009b; 정상권 외, 2009; 황석근 외, 2009b)를 제외한 모든 교과서에는 정리 1을 설명하는 과정에서 '증가상태'라는 개념이 나오는데, 이들 중 황석근 외(2009a)의 미적분과 통계 기본 교과서를 제외한[2] 모든 교과서는 충분히 작은 양수 h에 대하여

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h)$$

가 성립하면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다고 정의하고 있다.[3] 먼저 증가상태라는 정의가 과연 상식에 부합되는지 살펴보자.



<그림 1>



<그림 2>

모든 교과서는 함수 $f(x)$가 연속이라는 가정을 하지 않고 증가상태를 정의하고 있는데, 이 경우 <그림 1>과 같은 경우까지 증가상태라고 해야 한다. 따라서 이 정의가 증가상태라는 단어가 주는 어감과 다른 상황을 초래함을 알 수 있다.

설령 연속을 가정하더라도 문제는 여전히 존재한다. 함수의 그래프가 <그림 2>와 같이 주어질 때, 위 정의에 따르면 이 함수는 $x=a$에서 증가상태에 있지만 $x=a$를 포함하는 구간을 아무리 작게 잡아도 그 구간 위에서 증가함수가 아니다. 하지만 대학에 입학한 많은 학생들은 증가상태라는 용어의 어감으로 인하여 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에서 증가함수가 되는 것으로 오해하고 있으며, 현직 교사들도 같은 오해를 하고 있다.[4]

함수 $f(x)$가 $x=a$에서 증가상태에 있지만 $x=a$를 포함하는 구간을 아무리 작게 잡아도 그 구간 위에서 증가함수가 되지 않는 예는 미분가능한 함수의 경우에도 존재한다. 예를 들어, 함수 $g(x)$[5]가

$$g(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}x, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

와 같이 정의될 때, $g'(0)>0$이므로 황석근 외(2009a)를 제외한 교과서의 정의에 따르면 $x=0$에서 증가상태에 있음을 보일 수 있지만[6], 0으로 수렴하는 수열 $x_n=\dfrac{1}{n\pi}$에 대하여 $g'(x_{2n})<0$이고 $g'(x_{2n+1})>0$이므로 $x=0$을 포함하는 어떤 구간을 잡더라도 증가함수나 감소함수가 되지 않음을 알 수 있다.

다른 교과서와 달리 황석근 외(2009a)의 미적분과 통계 기본 교과서는 "a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(x)$가 증가할 때, $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다"고 정의하고, 증명은 없지만 $f'(a)>0$이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 증가상태에 있다고 설명하고 있다(p.58). 하지만 이러한 설명은 $f'(a)>0$이면 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 증가함수라는 설명이 되고, 위에서 예로 든 함수 $g(x)$는 $g'(0)>0$이지만, $x=0$을 포함하는 어떤 구간을 잡더라도 증가함수가 되지 않으므로 오류임을 알 수 있다.

2) 황석근 외(2009a)가 정의한 증가상태와 그 문제점은 뒤에 설명한다.

3) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 증가상태에 있으면, 어감과는 다르게 $x=a$를 포함하는 어떤 구간에 속하는 모든 x에 대하여 $f(x)$와 고정된 $f(a)$사이의 대소 관계를 알려주는 것이지, 함수 $f(x)$가 증가함수가 됨을 의미하는 것이 아니다.

4) 2010년 2월 23일 부산시 교육연수원에서 주관하는 수학Ⅱ 영역 직무연수에 참석한 27명의 현직 수학 교사를 대상으로 실시한 설문조사에서 22명의 교사들이 학생들과 동일한 오해를 하고 있는 것으로 조사되었다.

5) 이 함수 $g(x)$는 미분가능성을 묻는 예제로 고등학교 교과서에 자주 나오는 함수에 일차함수를 더하여 정의한 함수이므로 고등학생들이 이해하는데 아무런 어려움이 없는 함수이다.

6) 황석근 외(2009a)를 제외한 교과서에서는 $f'(a)>0$이면 $x=a$에서 증가상태에 있음을 증명하고 있다.

2. '미적분과 통계 기본' 교과서에서 함수의 증감을 설명하는 방식에 관하여

정리 1은 '평균값의 정리'를 이용하면 쉽게 증명할 수 있다. 하지만, 미적분과 통계 기본에서는 평균값의 정리를 다루지 않으므로 직관적으로 설명할 수밖에 없고, 고등학교 교육과정해설(교육과학기술부, 2008)에서도 정리 1의 내용을 "…알고, 이를 이용하여 여러 가지 다항함수의 증가, 감소를 조사해 보도록 한다"고 서술하고 있다 (p.190). 2007년 개정 교육과정 이전의 교과서 대부분과 2007년 개정 고등학교 미적분과 통계 기본 교과서 13종 모두 증가상태, 감소상태란 개념을 이용하여 함수의 증감을 설명하는 것도 이러한 이유에서 기인한 것으로 생각된다.

문제는 증가상태, 감소상태를 이용하여 함수의 증가, 감소를 설명하는 방식이다. 황석근 외(2009a)를 제외한 모든 교과서는, 먼저 "$x=a$에서 미분가능하고 $f'(a)>0$이면 $x=a$에서 증가상태"임을 증명하고 있다. 여기까지는 별 문제가 없다. 그런데, 모든 교과서는 이 단계에서 "함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면, $f(x)$는 이 구간의 모든 점에서 증가상태에 있으므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다"고 서술하고 있다. 다만, 이만근·이재실·오은영·조성오(2009)는 "증가상태에 있으므로"를 "증가상태에 있다. 따라서"와 같이 서술하고 있지만 본질적으로 같은 서술 방식이며, 황석근 외(2009a)의 미적분과 통계 기본 교과서는 위와 같이 서술하고 있지만, 증가상태의 정의가 다르므로 다른 내용을 서술하고 있는 경우이다[7]. 결국 황석근 외(2009a)의 미적분과 통계 기본을 제외하면, 교과서마다 약간씩 표현의 차이는 있지만 본질적으로 다음 정리를 당연한 것처럼 서술하고 있다.

정리 2: 함수 $f(x)$가 모든 점에서 증가상태이면
이 함수는 증가함수이다.

이 정리의 내용은 수사학적인 측면에서 보자면 당연한 것처럼 보이지만 정의에 입각하여 따져보면 그리 간단한 문제가 아니다. 이 정리는 하이네-보렐 정리를 이용하면 간단하게 증명할 수 있지만, 이는 실수의 완비성에 의존하는 것이며 고등학교의 수준을 넘는 내용이다. 귀류법을 사용하여 증명할 수도 있다. 함수 $f(x)$가 증가함수가 아니라면 $a<b$ 이지만 $f(a)\geq f(b)$인 a와 b를 잡을 수 있는데,

$$\{x : a\leq x<b,\ f(x)\geq f(b)\}$$

는 유계 닫힌집합이 되고, 이 집합의 최댓값에서 모순이 일어남을 알 수 있다. 이 경우에도 최댓값을 잡는 과정에서 실수의 완비성 공리가 필요하다. 필자들은 실수의 완비성에 의존하지 않고 정리 2를 증명하는 방법을 알지 못한다.

따라서 정리 2에 대하여 증명을 건너뛰고 있다는 것을 암시하기 위하여 '잘 알려져 있다'는 등의 서술 방식을 사용하지 않고, 당연한 것처럼 서술하는 것은 큰 잘못이다. 특히, 교사나 학생들이 '$f'(a)>0$이면 $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(x)$는 증가함수이다'는 오해를 하는 것은 이와 같은 잘못된 서술 방식에서 기인하였을 가능성이 크다. 또한, 함수의 증가, 감소를 직관적으로 설명하는 과정에서 증가상태나 감소상태라는 개념은 도움을 주지 못하므로 이러한 개념을 사용하는 것은 심각하게 재고될 필요가 있다.

3. 수학적 논점

위 논의에서 수학적인 부분을 보다 명확하게 하기 위하여, 열린구간에서 정의된 함수의 정의역의 한 점 a에서 다음 명제들을 생각하여 보자.

(i) 충분히 작은 양수 h에 대하여
$$f(a-h)<f(a)<f(a+h)$$
가 성립한다
(ii) a를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(x)$가 증가한다
(iii) $f'(a)>0$이다

이 때, (ii) → (i)은 성립하지만, 지금까지 살펴본 바와 같이 그 역은 성립하지 않는다. 또한, (iii) → (i)은 대부분의 교과서에서 증명하였듯이 성립하지만, (iii) → (ii)

7) 이미 II장 1절에서 황석근 외(2009a)의 서술 방식에 오류가 있음을 분석하였다.

는 성립하지 않는다. 그런데, 정의역의 모든 점에 대하여 (i)이 성립하는 것과 정의역의 모든 점에 대하여 (ii)가 성립하는 것은 동치이며, 이는 또한 정의역 위에서 함수가 증가함수라는 것과도 동치이다. 물론 정의역의 모든 점에 대하여 (iii)이 성립하면 그 함수는 증가함수이다. 교사와 학생들이 증가상태라는 용어의 의미에 대하여 혼란을 일으키는 주된 원인은 한 점에서 일어나는 국소적인 성질과 정의역 전체에서 일어나는 대역적인 성질을 혼동한 데에서 기인한 것이 아닌가 여겨진다.

모든 점에서 (i)이나 (ii)가 성립할 때 증가함수가 된다는 것을 증명하는 것은 국소적인 성질로부터 대역적인 성질을 이끌어 내는 과정인데, 고교 수준에서 불가능한 것으로 보인다. 결국 이 부분에서 핵심 정리라고 할 수 있는 정리 1의 증명이 불완전함에도 불구하고 마치 증명이 이루어진 것처럼 기술하는 방식은 개선되어야 할 것이다.

4. '수학II' 교과서에서 함수의 증감을 설명하는 방식에 관하여

7차 교육과정에서는 평균값의 정리가 수학II 영역에 포함되지 않고 '미분과 적분'영역에 포함되어 있었다. 이로 인해 7차 고등학교 수학II 교과서는 함수의 증가와 감소를 직관적으로 다룰 수밖에 없었고, 함수의 증감을 증가상태, 감소상태란 개념을 이용하여 설명함으로써 II장 2절에서 설명하였던 문제점을 고스란히 내포하고 있었다.

다행히도 2007년 개정 교육과정에서는 평균값의 정리가 수학II 영역에 포함됨에 따라 증가상태나 감소상태란 개념을 도입하지 않고 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소를 간단하게 설명하는 것이 가능해졌다. 대부분의 교과서에서는 증가상태, 감소상태란 개념의 도입 여부와 상관없이 평균값의 정리를 이용하여 함수의 증가와 감소를 설명하고 있다. 하지만, 3종의 교과서(양승갑 외, 2009b; 유희찬 외, 2009b; 황선욱 외, 2009b)에서는 평균값의 정리를 설명해 놓고도 이를 이용하지 않고, 미적분과 통계 기본에서처럼 '어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면, $f(x)$는 이 구간의 모든 점에서 증가상태에 있으므로 $f(x)$는 이 구간에서 증가한다'고 서술하고 있다.

고등학교 수준에서 평균값의 정리를 배우는 가장 큰 이유는 정리 1의 증명과 '상수차를 무시하면 부정적분이 유일하게 존재한다'는 것의 증명에 각각 이용하기 위한 것이다. 따라서 함수의 증가, 감소를 설명할 때, 이미 공부한 평균값의 정리를 이용하지 않고 증가상태와 감소상태 같은 개념을 이용하는 것은 교육과정의 내용을 온전히 전달하지 못하는 것이다.

물론 평균값의 정리를 증명할 때 사용하는 '최대·최소의 정리'는 실수의 완비성 공리를 사용하여 증명하는데, 그 증명은 고등학교 수준을 넘는다. 그러나 대부분의 교과서에서 최대·최소의 정리를 서술할 때는 그 증명을 하지 않는다는 것을 어떤 방식으로라도 알려주고 있다. 이에 반해서, '모든 점에서 증가상태에 있으므로 증가함수가 된다'는 정리 2의 경우에는 아무런 언급을 하지 않고 당연한 것처럼 서술하고 있으므로 교사나 학생이 오해할 우려가 있다.

III. 함수의 증가·감소를 설명하는 방식에 대한 제안

고등학교 교과서에서 증가상태, 감소상태라는 개념이 언제부터 사용되기 시작했는지 정확하게 알 수는 없으나, 한국교과서연구재단에서 소장하고 있는 교과서를 대상으로 조사한 바에 따르면, '교수요목기'에서 '제1차 교육과정기'로 넘어가는 단계에서 교과서로 사용된 新教授要目依據 高等學校 解析II[8](1955)에서 이미 증가상태라는 용어를 사용하고 있다. 이 교과서에서는 증가상태라는 용어를 명시적으로 정의하는 것이 아니라 $f'(x_1)>0$을 만족하는 점 $(x_1, f(x_1))$에서 "$f(x)$는 증가상태에 있다"고 서술하고 있다(p.165). 또, 한 가지 주목할 점은 증가상태의 의미와 관련하여 "점 x_1에 있어서 $f'(x_1)>0$이면, $f(x)$는 x_1의 근방에 있어서는 증가함수이라는 것을 알 것이다"와 같이 잘못된 서술을 하고 있다(pp.165-166). 이는 교사나 학생들이 증가상태를 공부하면서 오해하는 내용이기도 하다.

8) 한국교과서연구재단에서 소장하고 있는 교과서 중에는 가장 오래된 교과서이지만, 특이하게도 저자명이 명시되어 있지 않다.

그렇다면 교사나 학생이 오해할 여지가 많은 증가상태, 감소상태라는 개념을 사용하지 않고 함수의 증가나 감소를 설명하는 방법은 무엇일까? 수학Ⅱ 영역에서는 평균값의 정리를 이용하면 간단하게 증명할 수 있으므로 그 방법이 명확하다. 하지만, 미적분과 통계 기본 영역에서는 평균값의 정리를 사용하지 않으므로 함수의 증가와 감소를 증명할 수는 없다. 우선 미국과 일본 교과서의 사례를 간단히 살펴보자.

미국의 경우 National Science Foundation의 지원을 받은 Core-Plus Mathematics Project(CPMP)의 결과로 만들어진 고등학교 교과서(Coxford 외, 2003a)를 살펴보면, 다양한 함수의 그래프를 그릴 수 있는 수학 도구를 활용하여 함수의 그래프와 도함수의 그래프를 함께 그려서 비교해 보고, 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소 사이의 관계를 직관적으로 유추하는 정도로만 다루고 있다. 즉, 도함수의 부호와 함수의 증가, 감소에 대한 구체적인 명제는 제시하지 않고 있다. 미적분과 통계 기본 영역은 대학에서 인문학이나 사회과학을 공부할 학생들이 주로 배우는 과목이므로, 미국 대학에서 인문학이나 사회과학을 공부할 신입생들을 위한 대학교재와 비교를 하는 것도 의미가 있을 것이다. 예를 들어, Barnett; Ziegler & Byleen(2002)의 교재 4.2절(p.242)에서는, 함수 $f(x)$의 그래프를 보고 함수가 증가하는 구간에서는 $f'(x)>0$, 감소하는 구간에서 $f'(x)<0$이 성립함을 살펴본 다음, 아래의 명제가 성립한다고 기술하고 있다:

In general, if $f'(x)>0$(is positive) on the interval (a,b), then $f(x)$ increases and the graph of f rises as we move from left to right over the interval.

즉, 함수가 증가하는 구간, 감소하는 구간에서 도함수의 부호를 살펴봄으로써 그 연관성을 암시한 다음, 도함수의 부호를 이용하면 함수의 증감을 판단할 수 있다고 증명없이 기술하고 있다.

일본의 경우, 우리나라 수학Ⅱ에 해당되는 數學Ⅲ 교과서에서는 평균값의 정리를 이용하여 함수의 증감을 증명하고 있지만, 미적분과 통계 기본에 해당되는 數學Ⅱ 교과서들은 대부분 那須俊夫 외(平成16年)의 경우에서 보듯이 Barnett 외(2002)의 교재와 비슷한 방식을 취하고 있다. 일부 교과서는 柳川堯 외(平成17年)에서처럼 접선을 이용하여 함수의 증가, 감소를 설명하기도 한다. 즉, 접점 근방을 확대한 그림을 제시하고, 접점 근방에서는 접선과 함수의 움직임이 거의 비슷하므로 접선의 기울기가 양이면 접점 근방에서 함수가 증가한다고 설명하고 있다. 이러한 설명은 황석근 외(2009a)의 설명(p.58)과 유사하며, 본 고의 Ⅱ장 1절 마지막 단락에서 설명하였듯이 오류를 내포할 수 있으므로 설명할 때 주의가 필요하다.[9]

필자들의 의견으로는 미적분과 통계 기본 영역에서 함수의 증가와 감소를 증명없이 설명할 때, 증가상태나 감소상태라는 개념을 도입하는 것보다는 Barnett 외(2002)나 那須俊夫 외(平成16年)에서처럼 함수의 그래프를 이용하여 함수의 증감과 도함수의 부호 사이의 연관성을 직관적으로 전달하는 것이 낫다고 판단된다. 만약, 학생들이 이해할 수 있는 범위 내에서 엄밀성을 추가한다면, 구간에서 증가하는 함수는 그 구간에서 도함수의 값이 0이상임을 증명하는 정도가 가능할 것이다. 즉, 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 증가함수인 경우에 증가함수의 정의를 이용하면 충분히 작은 $h\,(h\neq 0)$에 대하여 다음 부등식

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0$$

이 성립하고, 이로부터 각 점에서 도함수가 $f'(x)\geq 0$을 만족함을 증명한다. 그리고 현 단계에서 증명을 할 순 없지만, '어떤 구간에서 $f'(x)>0$이면 그 구간에서 함수 $f(x)$가 증가함수가 된다'고 서술하는 것이 한 가지 방법이라고 생각한다[10]. 또는 교육과정에는 없더라도 직관을 도울 수 있는 그림과 함께 평균값 정리를 서술해 주고, 이를 이용하는 것이 학생들에게 자연스럽고 지면도 줄일 수 있는 방법이라고 생각한다.

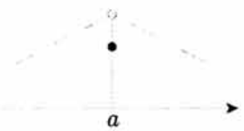
Ⅳ. 교과서에서 함수의 극대·극소와 최대·최소를 설명하는 방식의 문제점

2007년 개정 고등학교 교과서 중 이준열 외(2009a)의 미적분과 통계 기본과 2종의 수학Ⅱ(계승혁 외, 2009; 이

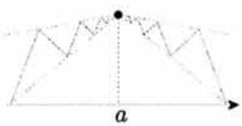
9) 주어진 함수의 도함수가 연속이면 큰 문제가 되지 않는다.

10) 현 단계에서 역시 증명을 할 순 없지만, 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서 $f'(x)=0$을 만족하면, 그 구간에서 상수함수가 됨을 함께 서술해주는 것도 고려할 수 있다.

준열 외, 2009b) 교과서를 제외하면 모든 교과서는 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이고 $x=a$를 경계로 증가상태에서 감소상태로 바뀔 때 $f(a)$를 극댓값이라고 정의하고 있다. 비록 정상권 외(2009)는 증가상태, 감소상태란 용어를 명시적으로 정의하지는 않았지만 보조단(p.171)에서 그 의미를 설명하고 있는데, 이것은 앞서 설명한 황석근 외(2009a)의 정의와 일치한다. 어느 경우든 $f(x)$가 $x=a$를 오른쪽 끝점으로 하는 어떤 열린 구간에서 증가함수이고 $x=a$를 왼쪽 끝점으로 하는 어떤 열린 구간에서 감소함수일 때, $f(a)$가 극댓값이 된다고 정의하는 셈이다. 이제 이와 같이 정의한 극댓값의 문제점을 살펴보자.



<그림 3>



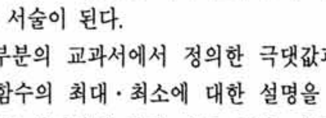
<그림 4>

먼저 7차 고등학교 교과서 중에서 정광식·강병개·서정인(2006)은 앞에서처럼 극댓값을 정의하면서 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이라는 가정을 하지 않고 있다. 이 경우 <그림 3>에서 보는 함수[11]는 $x=a$에서 극댓값을 가지게 되므로 정의에 문제가 있음을 알 수 있다. <그림 4>에서 보듯이 연속임을 가정해도 또 다른 문제점이 여전히 남아 있다. 이 함수는 $x=a$에서 최댓값을 가지므로 상식적으로 생각한다면 $f(a)$가 극댓값이 되어야 하지만, $x=a$의 왼쪽에서 아무리 작은 구간을 잡더라도 그 위에서 증가함수가 아니다. 따라서 대부분 교과서의 정의를 따르자면 <그림 4>의 함수는 $x=a$에서 극댓값을 가지지 않게 된다.[12] 물론, 함수 $f(x)$가 미분가능한 경우에도 이와 유사한 예는 얼마든지 들 수 있다.

즉, 대부분의 교과서에서 취하고 있는 극댓값의 정의는 상식에 부합되지 않는 정의이다. 이러한 문제점은 상수함수의 경우 더욱 심각하게 나타난다. 대부분 교과서의 정의를 따르자면 상수함수는 극댓값과 극솟값을 가지지 않게 되고, 따라서 <그림 5>에서 보는 함수 $f(x)$[13]도 극댓값과 극솟값을 가지지 않는다. 이러한 결과가 각 교과서에서 어떤 모순을 초래하게 되는지 함수의 최대·최소와 관련지어 살펴보자.

극댓값과 극솟값을 정의하는 방법과 상관없이 모든 수학II 교과서에서는 '함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이면 최댓값과 최솟값을 가지게 되는데, 열린 구간 (a,b)에서 극댓값과 극솟값 및 구간 양 끝점에서 함숫값 $f(a)$, $f(b)$중에서 가장 큰 값과 가장 작은 값이 각각 최댓값과 최솟값이 된다'고 설명하고 있다. 이 과정에서 최대·최소의 정리를 언급하여 최댓값과 최솟값이 존재함을 설명하는 교과서도 있고, 아무런 언급없이 그 존재성을 말하는 교과서도 있다. 또, 구체적으로 '열린 구간 (a,b)에서 극댓값 및 극솟값'이란 서술을 하지 않은 교과서도 있으나, 계승혁 외(2009)와 이준열 외(2009a; 2009b)의 교과서를 제외하면, 정의로부터 같은 의미를 갖는 서술이 된다.

이때, 대부분의 교과서에서 정의한 극댓값과 극솟값의 정의와 함수의 최대·최소에 대한 설명을 결합하면 심각한 문제를 야기하게 된다. 예를 들어, 대학수학능력시험에도 자주 출제되는 <그림 5>와 같은 닫힌 구간 $[0,12]$에서 정의된 함수의 최댓값과 최솟값을 구하면 각각 5와 1이라는 것에 이견이 없을 것이다. 하지만, 대부분 교과서의 정의에 의하면 이 함수는 열린 구간 $(0,12)$에서 극댓값과 극솟값을 가지지 않으므로 $f(0)$과 $f(12)$ 중에서 큰 값이 최댓값, 작은 값이 최솟값이 된다. 따라서, 최댓값과 최솟값은 모두 3이 되고 함수 $f(x)$는 상수함수 $f(x)=3$이 된다는 모순에 도달한다. 이러한 모순은 극댓값과 극솟값의 정의를 잘못하였기 때문에 생기는 것이다.



<그림 5>

11) 박세희(1983)에서 같은 문제점을 지적하기 위하여 <그림 3>의 함수가 사용되었다.

12) 이 장에서 말하는 대부분의 교과서는 계승혁 외(2009)와 이준열 외(2009a; 2009b)의 교과서 3종을 제외한 2007년 개정 교육과정에 따른 모든 교과서를 의미한다.

13) 박세희(1983)에서도 최대·최소와 관련된 문제점을 지적하기 위하여 <그림 5>와 유사한 함수가 사용되었다.

2007년 개정 고등학교 미적분과 통계 기본 교과서의 경우에도 이준열 외(2009a)를 제외하면 본질적으로 동일한 문제점이 내재되어 있다. 다만, 몇몇 교과서(이만근 외, 2009; 유희찬 외, 2009a; 이동원 외, 2009)에서는 다항함수에 한하여 서술하였기 때문에 논리적으로는 문제가 없지만, <그림 5>와 같이 간단한 함수의 최댓값과 최솟값을 구하는 방법에 대한 논리를 체계적으로 제공하지 못하고 있다. 특이하게도 이강섭·왕규채·송교식·양인웅(2009a)은 최대·최소를 교과서가 아닌 익힘책에서 다루고 있는데, 이 역시 다항함수에 국한하고 있다.

지금까지 살펴본 문제점들은 2007년 개정 교육과정 이전부터 반복되어 온 것으로, 박세희(1983)는 제4차 교과서의 유사한 문제점에 대해 지적한 바 있다. 이공계열로 진학할 학생들은 삼각함수를 비롯한 초월함수의 최댓값과 최솟값을 구하게 되는데, 다항함수에서만 적용되는 내용을 서술하여 학생들을 혼란스럽게 만들 필요가 있을지 생각해 볼 필요가 있다.

V. 함수의 극대·극소와 최대·최소를 설명하는 방식에 대한 제안

함수의 극대·극소, 그리고 최대·최소라는 개념 자체는 함수의 연속성이나 미분가능성과는 아무런 관련이 없는 것이다. 이러한 개념이 연속성이나 미분가능성과 연관되었을 때 고등학교에서 가르쳐야 할 것은 다음 내용이 핵심이 아닌가 싶다.

- 유계 닫힌 구간에서 정의된 연속함수는 최댓값과 최솟값을 가진다
- 열린 구간 위에서 미분가능하고 그 도함수가 양이면 함수는 그 구간에서 증가함수이다.
- 함수가 $x=a$에서 극댓값 또는 극솟값을 가지고 미분가능하면 $f'(a)=0$이다.
- 유계 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 (a,b)에서 미분가능한 함수의 최댓값과 최솟값은 구간의 양 끝점이나 미분계수가 0인 점의 함숫값을 비교하여 가장 큰 값과 가장 작은 값을 택하면 된다.

이러한 목적에 부합되게 극대와 극소를 정의하는 것은 다음과 같이 표준적인 방법[14]으로 정의하는 것이다.

> 정의: $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 함수 $f(x)$의 값이 $f(a)$ 이하(이상)이면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대(극소)가 된다고 하며, $f(a)$를 극댓값(극솟값)이라고 한다.

이러한 정의는 대학 교재에서 일반적으로 사용되는 정의로 최봉대 외(2006)의 7차 고등학교 수학II 교과서에서 사용되었고(p.106), 2007년 개정 교육과정에 따른 계승혁 외(2009)와 이준열 외(2009b)의 교과서도 본질적으로 이와 같이 정의하고 있다. 한 가지 차이점은 계승혁 외(2009)에서는 이러한 정의를 적극적으로 해석함으로써 닫힌 구간의 양 끝점에서도 극대와 극소를 따질 수 있음을 설명하고 있으며(p.144), 이 경우 훨씬 간단명료하게 극댓값 가운데 가장 큰 것이 최댓값이고, 극솟값 가운데 가장 작은 것이 최솟값이라는 평범한 진리를 얻을 수 있다. 이러한 진리는 최댓값(absolute maximum)은 당연히 극댓값(local maximum)이어야 한다는 상식에도 부합된다.

미국과 일본 교과서의 경우를 간단히 살펴보자. CPMP에서 개발한 미국 고등학교 교과서(Coxford 외, 2003b)에서는 최댓값을 "An absolute maximum is a value M for which $f(x) \leq M$ for all values of x"와 같이 엄밀하게 정의하고 있다(p369). 반면에 극대와 극소는 그래프를 이용하여, 'peak를 local maximum, valley를 local minimum이라 부른다'고 직관적으로 설명하고 있다. 하지만, 교사용 지도서(Coxford 외, 2003d)에서는 함수의 정의역을 한 점 근방으로 제한할 때 최댓값이 되는 것을 극댓값이라고 하기 때문에 maximum에 local을 붙여서 부른다고 부연 설명하고 있다(p426). 즉, 미국 고등학교 교과서에서는 극대, 극소에 대한 표준적인 정의를 염두에 두고 직관적으로 설명하는 방식을 취하고 있다. 앞서 인용하였던 Barnett(2002)는 다음과 같이 극값에 대한 표준적인 정의를 사용하고 있다(p247).[15]

14) 표준적인 방법이란 대학 미적분학이나 해석개론과 같은 과목에서 극대와 극소를 정의하는 일반적인 방법이란 의미이다.

15) Barnett의 교재는 미국 고등학교 3년차 학생들이 공부하는 책이라는 것에 주목할 필요가 있다.

In general, we call $f(c)$ is a local maximum if there exists an interval (m,n) containing c such that $f(x) \leq f(c)$ for all x in (m,n).

일본 교과서는 數學II, 數學III 모두 $x=c$까지 함수가 증가하다가 $x=c$부터 감소할 때, $f(c)$를 극댓값이라고 정의하고 있다. 이러한 정의는 $x=c$를 경계로 증가상태에서 감소상태로 바뀔 때 $f(c)$를 극댓값이라고 정의하는 것과 같은 것이지만, 증가상태나 감소상태라는 불필요한 개념을 도입하지 않았다는 차이가 있다.

극대 · 극소라는 개념을 표준적인 방법으로 정의할 때 학생들에게 어려울 수 있는 부분이 있다면, 그것은 정의에서 '어떤'과 같은 논리적 표현을 사용하는 것이다. 특히, 7차 교육과정에서는 '어떤'이나 '모든'과 같은 단어가 들어가는 명제에 대한 내용을 다루지 않았기 때문에 더욱 어려움이 있었으리라 여겨진다. 하지만, 대부분의 교과서에서 증가상태나 감소상태를 정의할 때 '어떤'과 '모든'을 이미 사용하고 있었고, '충분히 작은'과 같이 어려운 논리적인 개념을 사용하고 있는 점을 감안하면 극대와 극소를 표준적인 방법으로 정의하지 못할 이유가 없다. 한편, 2007년 개정 교육과정부터는 '어떤'이나 '모든'이 들어있는 명제를 다루도록 하고 있으므로 표준적인 정의를 사용하는 데에 아무런 문제가 없다. 특히, 표준적인 방법으로 정의하는 것은 실생활에서 학생들에게 친숙한 '골목대장'이란 개념을 수학적으로 개념화하여 정의한 것으로 볼 수 있으므로 학생들이 직관적으로 받아들이기 쉬운 측면이 있다.

극대 · 극소를 정의하는 표준적인 방법과 대부분의 교과서에서 정의하는 방법에 대한 <표 1>의 설문조사 결과에서 알 수 있듯이, 현직 교사들도 표준적인 방법으로 정의하는 것이 더 나은 방법이며, 이렇게 정의하는 것이 기존 대부분의 교과서에서 정의하는 방법에 비해 더 쉽다고 생각하고 있다.[16]

이렇게 표준적인 방법으로 극대·극소를 정의하면, <그림 3>의 그림에서 보는 함수는 $x=a$에서 극댓값을 가지지 않으며, <그림 4>의 그림에서 보는 함수는 $x=a$에서 극댓값을 가지게 된다. 또, <그림 5>에서 닫힌 구간 $[2,4]$에 속하는 모든 점에서 극댓값을 가지게 되고, 닫힌 구간 $[8,10]$에 속하는 모든 점에서 극솟값을 가지게 된다. 만약 계승혁 외(2009)의 정의를 따른다면 <그림 5>의 함수 $f(x)$는 $x=0$과 $x=12$에서도 각각 극솟값과 극댓값을 가지게 되므로 극댓값끼리 비교하여 최댓값 5를 구하고, 극솟값끼리 비교하여 최솟값 1을 구할 수도 있다. 즉, 표준적인 방법으로 정의하는 것이 개념을 받아들이기에도 쉽고 상식에 잘 부합됨을 보여준다.

<표 1> 함수의 극대 · 극소를 정의하는 방법에 대한 설문조사 결과(%)

구분 / 설문 내용	설문 문항	응답 결과
함수의 극댓값을 정의하는 방법으로 어떤 것이 더 나은 방법이라고 생각하십니까?	① 기존 교과서와 같이 $x=a$의 좌우에서 $f(x)$가 감소상태에서 증가상태로 변할 때, $f(a)$를 극댓값이라고 정의하는 방법	14.8
	② $x=a$를 포함하는 어떤 열린 구간에서 $f(a)$가 최댓값이 될 때, $f(a)$를 극댓값이라고 정의하는 방법	85.2
함수의 극댓값을 정의하는 위 설문문항의 두 가지 방법 중 어려움의 정도에 대해 어떻게 생각하십니까?	① ②번 방법이 훨씬 더 어렵다.	0
	② ②번 방법이 조금 더 어렵다.	18.5
	③ 비슷하다.	25.9
	④ ②번 방법이 조금 더 쉽다.	14.8
	⑤ ②번 방법이 훨씬 더 쉽다.	40.8

16) 2010년 2월 23일 부산시 교육연수원에서 주관하는 수학II 영역 직무연수에 참석한 27명의 현직 수학 교사를 대상으로 실시한 설문조사 결과이다.

VI. 맺음말

이 연구에서 필자들은 2007년 개정 고등학교 교과서를 모두 분석하여 함수의 증가와 감소, 극대·극소 및 최대·최소와 관련된 정의 및 서술 내용의 문제점을 파악하고 그에 대한 개선안을 제시하였다.

정의는 교과서마다 다를 수 있다. 그러나 경위가 어찌 되었든 교과서에 정의한 바를 이용하여 추론하였을 때 틀린 명제를 얻게 되는 정의가 교과서에 실린다는 것은 있을 수 없는 일이다. 또한, 정의를 저자 나름대로 하더라도 상식에 부합되지 않는 정의를 해서는 안 될 것이다. 이러한 일들이 왜 버젓이 일어나고 있는지 따져보는 일은 필자들의 한계를 넘는 일이다. 교과서에 관하여 전문적으로 연구하는 분이 나서서 해방 이후 수학 교과서를 체계적으로 분석하여 왜 이러한 일이 벌여졌으며, 왜 수학계 스스로 고치지 못하고 있는지 밝혀준다면 매우 의미 있는 연구가 될 것이다.

고등학교에서 연속이나 미적분과 같이 극한의 개념을 다루는 경우, 이를 논리적으로 빈틈없이 설명하는 것은 불가능하다. 극한의 개념을 제대로 설명하는 것은 실수의 완비성 공리에 의존하는데, 실제 역사적인 관점에서 보더라도 실수의 완비성을 완벽하게 이해한 것은 1870년대 칸토르와 데데킨트의 덕분이다. 특히, 고등학교에서 나오는 정리들 가운데 중간값의 정리와 최대·최소 정리는 증명을 하지 못하고 직관에 호소할 수밖에 없는 부분이다. 이 경우에도 이러한 내용이 그럴듯해 보이도록 많은 예를 들어서 설명할 필요가 있으며, 특히 증명을 하지 않고 지나간다는 것을 명시할 필요가 있다. 앞에서 살펴본 바와 같이 심각한 증명이 필요함에도 불구하고 당연한 것처럼 서술하는 방식은 교사나 학생들을 혼란스럽게 만들 수 있기 때문이다.

참 고 문 헌

김해경 · 최은자 · 김상철 · 김성남 · 김경돈 · 서동엽 · 박지현 · 문광호 · 윤성식 (2009). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 더텍스트.

계승혁 · 김홍종 · 하길찬 · 박복현 · 장성욱 · 박장순 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 성지출판(주).

교육과학기술부 (2008). 교육인적자원부 고시 제 2007-79호에 따른 고등학교 교육과정 해설⑤ 수학, 교육과학기술부.

박세희 (1983) 高校 教科書內容의 몇가지 問題點, 수학교육논총 1, pp.109-128, 서울: 대한수학회.

심상길 · 최재길 (2009). 함수의 극값에서 이공계열 학생들의 오류에 대한 분석, 한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집> **23(3)**, pp.583-597.

양승갑 · 신준국 · 김창규 · 이준희 · 유혜진 · 성덕현 · 양경식 · 조성철 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: (주)금성출판사.

양승갑 · 신준국 · 윤갑진 · 성덕현 · 이승우 · 박상우 · 조성철 · 김창규 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: (주)금성출판사.

우무하 · 신태교 · 이재혁 · 김한승 · 이정우 · 조원호 (2009). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: (주)박영사.

우정호 · 박교식 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 임재훈 · 신보미 · 최인선 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 두산동아.

우정호 · 박교식 · 박경미 · 이경화 · 김남희 · 임재훈 · 최남광 · 송은영 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 두산동아.

유희찬 · 조완영 · 손홍찬 · 조정묵 · 이병만 · 김용식 · 임미선 · 신미향 · 유익승 · 한명주 · 박원균 · 남선주 · 정성윤 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: (주)미래엔 컬처그룹.

유희찬 · 조완영 · 손홍찬 · 조정묵 · 이병만 · 김용식 · 임미선 · 신미향 · 유익승 · 한명주 · 박원균 · 남선주 · 정성윤 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: (주)미래엔 컬처그룹.

윤재한 · 박진석 · 권백일 · 김명석 · 성기욱 · 조도상 · 김영제 · 신재봉 · 정지현 · 장인선 · 김장호 · 이혜영 · 김재진 · 김원일 · 오성근 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 더텍스트.

윤재한 · 박진석 · 신재봉 · 김장호 · 이혜영 · 조도상 · 김영제 · 권백일 · 정지현 · 장인선 · 김재진 · 김원일 · 오성근 · 성기욱 · 김명석 · 김해경 · 서동엽 · 최은자 · 김상

철 · 김성남 · 윤성식 · 박지현 · 문광호 · 김경돈 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 더텍스트.

이강섭 · 왕규채 · 송교식 · 양인웅 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본 익힘책, 서울: (주)지학사

이강섭 · 왕규채 · 송교식 · 양인웅 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: (주)지학사

이동원 · 유병훈 · 김훈 · 안경호 · 박미화 · 정지연 · 이현정 (2009). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 법문사

이만근 · 이재실 · 오은영 · 조성오 (2009) 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: (주)고려출판

이준열 · 최부림 · 김동재 · 서정인 · 전용주 · 김홍섭 · 장희숙 · 조석연 · 오승아 · 송정 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 해법 천재교육.

이준열 · 최부림 · 김동재 · 서정인 · 전용주 · 김홍섭 · 장희숙 · 조석연 · 오승아 · 송정 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 해법 천재교육.

정상권 · 이재학 · 박혜숙 · 홍진곤 · 박부성 · 김정배 · 김상훈 · 김윤희 · 우혜영 (2009). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: (주)금성출판사.

정광식 · 강병개 · 서정인 (2006). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 동아서적.

최봉대 · 강옥기 · 황석근 · 이재돈 · 김영옥 · 홍진철 (2006). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: (주)중앙교육진흥연구소.

최용준 · 김서령 · 이정례 · 선우하식 · 이진호 · 조동석 · 이한주 · 김덕환 · 김민정 · 박효정 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 천재교육.

최용준 · 김서령 · 이정례 · 선우하식 · 이진호 · 조동석 · 이한주 · 김덕환 · 김민정 · 박효정 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 천재교육.

황석근 · 임석훈 · 김익표 · 강승구 · 김갑철 · 김정석 · 박진숙 · 배정득 · 송영복 · 안태종 · 윤정호 · 장창근 · 최정현 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: (주)교학사.

황석근 · 임석훈 · 김익표 · 강승구 · 김갑철 · 김정석 · 박진숙 · 배정득 · 송영복 · 안태종 · 윤정호 · 장창근 · 최정현 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: (주)교학사.

황선욱 · 강병개 · 허민 · 최수창 · 신동윤 · 장경성 · 김수영 · 한용익 · 황세호 · 김창일 · 정상일 · 이문호 · 박진호 (2009a). 고등학교 미적분과 통계 기본, 서울: 좋은책 신사고.

황선욱 · 강병개 · 허민 · 최수창 · 신동윤 · 장경성 · 김수영 · 한용익 · 황세호 · 김창일 · 정상일 · 이문호 · 박진호 (2009b). 고등학교 수학Ⅱ, 서울: 좋은책 신사고.

저자불명(단기 4288년). *新教授要目依據 高等學校 解析Ⅱ*, 서울: 문운당(文運堂)

柳川堯; 入江幸右衛門; 大場清; 橋本義武; 枡田幹也 & 山本愼 (平成17年). *新 數學Ⅱ*, 京都市: 知硏出版.

那須俊夫; 正田實; 鈴木義也; 堤陽; 西川充; 西本敏彦; 前田文之 & 山田俊彦 (平成16年). *高等學校 數學Ⅱ*, 東京: 第一學習社.

Arthur F. Coxford, James T. Fey, Christian R. Hirsch, Harold L. Schoen, Eric W. Hart, Brian A. Keller, & Ann E. Watkins (2003a). *Contemporary Mathematics in Context Course 4, Part A*, Ohio: Glencoe/McGraw-Hill.

Arthur F. Coxford, James T. Fey, Christian R. Hirsch, Harold L. Schoen, Eric W. Hart, Brian A. Keller, & Ann E. Watkins (2003b). *Contemporary Mathematics in Context Course 4, Part B*, Ohio: Glencoe/McGraw-Hill.

Arthur F. Coxford, James T. Fey, Christian R. Hirsch, Harold L. Schoen, Eric W. Hart, Brian A. Keller, & Ann E. Watkins (2003c). *Contemporary Mathematics in Context Course 4, Part A (Teacher's Guide)*, Ohio: Glencoe/McGraw-Hill.

Arthur F. Coxford, James T. Fey, Christian R. Hirsch, Harold L. Schoen, Eric W. Hart, Brian A. Keller, & Ann E. Watkins (2003d). *Contemporary Mathematics in Context Course 4, Part B (Teacher's Guide)*, Ohio: Glencoe/McGraw-Hill.

Raymond A. Barnett, Michael R. Ziegler, & Karl E. Byleen (2002). *Calculus for business, Economics, Life Sciences, and Social Sciences (Ninth Edition)*, New Jersey: Prentice Hall.

A Critical Analysis on an explanation for Monotonicity and Local Extrema of functions in Korean Mathematics Textbooks

Kye, Seung-Hyeok
Department of Mathematics, Seoul National University, Seoul 151-742, Korea
E-mail : kye@snu.ac.kr

Ha, Kil-Chan
Faculty of Mathematics and Statistics, Sejong University, Seoul 143-747, Korea
E-mail : kcha@sejong.ac.kr

In this article an explanation of monotonicity of functions and the definition of local extrema in Korean highschool textbooks based on national curriculum(revised in 2007) are analyzed critically. On the basis of this analysis, we indicate some problems and propose its improvements.

* ZDM Classification : U24, I14, I44, B74, D34
* 2000 Mathematics Subject Classification : 97U20, 97C90, 97D30, 97D70
* Key Words : derivative function, increasing state, increasing function, maximum-minimum theorem, mean value theorem, local maximum, absolute maximum