744쪽 기본연습문제에 다음을 추가하는 것이 친절해 보인다.

기본연습문제

이 연습문제는 벡터장의 회전장이 좌표계와 무관하다는 것을 보여준다. 공간에서 새로운 기저 $\tilde{\mathbf{e}} = \big(\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\big)$ 는 기존의 기저 $\mathbf{e} = \big(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\big)$ 에 대하여 일차결합으로 표현된다:

$$\tilde{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^{3} a_{ij}\mathbf{e}_i.$$

이때 행렬 $A = \big(a_{ij}\big)$ 를 사용하여 위 식을 간단히 하면

$$\tilde{\mathbf{e}} = \mathbf{e}A$$

와 같이 나타낼 수 있다. 행렬 A 의 역행렬을 $B = \big(b_{ij}\big)$ 라 하자.

1. 공간의 점들을 새로운 기저 $\tilde{\mathbf{e}}$ 에 의하여 나타내면 점들의 새로운 좌표 $\tilde{X} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{pmatrix}$ 는 기존의 좌표 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ 에 대하여

$$\tilde{X} = BX$$

   임을 보이라.

2. 연쇄법칙을 이용하여 편미분 사이의 관계식

$$D_j = \sum_i b_{ij}\tilde{D}_i \qquad (즉,\ \nabla = \tilde{\nabla}B)$$

   를 유도하라.

3. 새로운 기저에 대하여 벡터장 $\mathbf{F}$ 를

$$\mathbf{F} = \sum_j \tilde{f}_j\,\tilde{\mathbf{e}}_j$$

   로 두었을 때

$$f_i = \sum_j a_{ij}\tilde{f}_j \qquad (즉,\ f = A\tilde{f})$$

   임을 보이라.

4. 다음 식을 유도하라.

$$\operatorname{curl}\mathbf{F} = \sum_{i,j} \left(D_i f_j\,\mathbf{e}_i\right) \times \mathbf{e}_j = \sum_{i,j} \left(\tilde{D}_i \tilde{f}_j\,\tilde{\mathbf{e}}_i\right) \times \tilde{\mathbf{e}}_j.$$

이제 746 쪽에 나오는 처음 “기본연습문제”를 풀어 보자.

공간에서 단위벡터 $\mathbf{n}$ 에 수직인 평면에 속하는 영역 D 가 주어졌다고 하자. 그러면 새로운 직교좌표계 $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ 를 도입하여 $\tilde{z}$-축의 방향이 $\mathbf{n}$ 의 방향과 같게 두자. 즉, 각 축 방향의 단위벡터를 $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3$ 라 하면, $\tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{n}$ 이다.

그러면 이미 745쪽에서 살펴본 것을 새로운 좌표계에 적용하면

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial D} \left(\tilde{f}_1 \tilde{\mathbf{e}}_1 + \tilde{f}_2 \tilde{\mathbf{e}}_2 \right) \cdot d\mathbf{s} = \iint_D \left(\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{x}} - \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial \tilde{y}} \right) dV_2 = \iint_D \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dV_2$$

를 얻는다. 이제 평균값 정리를 이용하면 원하는 결론이 나온다.