

제 1 절 p.21

로그함수는 소리의 크기(dB, decibel)을 나타낼 때에나, 빛의 밝기, 지진의 강도 등을 나타낼 때 쓰인다. 진도 3의 지진보다 진도 4의 지진은 10배로 강한 지진이고 진도 5의 지진은 100배로 강한 지진이다.

우리의 감각기관은 로그함수의 성질을 가지고 있다. 시끄러운 곳에서는 동전 떨어지는 소리가 잘 들리지 않지만 쥐 죽은 곳에서는 바늘 떨어지는 소리도 들린다. 사람이 인식하는 소리의 크기의 범위는 대체로 0 dB (10^{-12} watt/meter²) 에서 120 dB (1 watt/meter²) 사이이다. 10 dB 은 귀엣을 지나는 모기소리의 크기 정도이고 시끄러운 식당에서는 60 dB 정도이며, 3 m 전방에서 땅과는 압축 드릴이 내는 소리는 90 dB 정도이다.¹ 소리를 진동수로 구별할 때에는 진동수가 2배이면 한 옥타아브가 높아지고, 진동수가 4배이면 두 옥타아브가 높아진다.

대낮에 자동차 전조등은 밝게 느껴지지 않지만, 그믐날 밤에는 눈이 많이 부시게 한다.

컴퓨터 칩을 설계할 때에도 2배로 많은 용량을 개발한다:

$$64\text{KB}, 128\text{KB}, 256\text{KB}, 512\text{KB}, 1024\text{KB} = 2^{10}\text{KB} = 1\text{MB},$$

$$2\text{MB}, 4\text{MB}, \dots, 1\text{GB} = 1024\text{MB} = 2^{10}\text{MB} = 2^{20}\text{KB}, \dots$$

우리가 “스무고개”라는 놀이를 할 때에도 사실은 100만 가지 이상(2^{20})의 정보에서 하나를 발견하는 것이다.

로그함수는 목적과 편리에 따라 기준으로 하는 밑이 다를 수 있다:

$$a^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a y.$$

로그함수는 밑 a 가 다르더라도 서로 비례관계에 있기 때문에 미적분학에

¹소리의 강도를 w 라 하고, 최저 강도를 w_0 (0 dB) 이라 하면

$$dB = 10 \log_{10}(w/w_0) = \log_{10^{-10}} \frac{w}{w_0}$$

이다.

서는 자연상수 e 를 밑으로 하는 로그함수를 기준으로 삼는다.² 앞으로 자연로그함수를 $\log$ 또는 $\log x$ 로 나타낸다.

로그 함수는 반비례 함수 $1/x$ 의 그래프 아래쪽의 넓이이다:

$$\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}.$$

figure!

이로부터

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < \log n < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

를 안다.

1.0.1 기본연습문제

다음을 보이라

1. $x > 0$ 이면

$$\log x < x, \quad \log x < 2\sqrt{x}, \quad \log x < 3\sqrt[3]{x}$$

이다.

- 2.

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{\log n} = \infty, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\log n)^2} = \infty, \quad \sum_{n \geq 2} \frac{1}{(\log n)^3} = \infty, \dots$$

3. 어떤 과목을 가르치는 강사에게 시간당 드는 비용이 수강생이 1명이면 1만원, 2명이면 $(1 + \frac{1}{2})$ 만원, 3명이면 $(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})$ 만원, n 명이면 $(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n})$ 만원 이라고 하자. 이제 수강생이 많아지면 강사료는 한없이 증가함을 보이라.

또 일인당 수강료

$$\frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \right) \quad (\text{만원})$$

²로그함수 $\log_a$ 의 밑 a 는 1 이 아닌 양수이다. 이때

$$\log_a x = k \log_e x \quad \left(k = \frac{1}{\log_e a} \right)$$

이다.

는 점점 작아짐을 보이라. 또 세무서에서 강사에게 부과하는 공식을 유도하라.